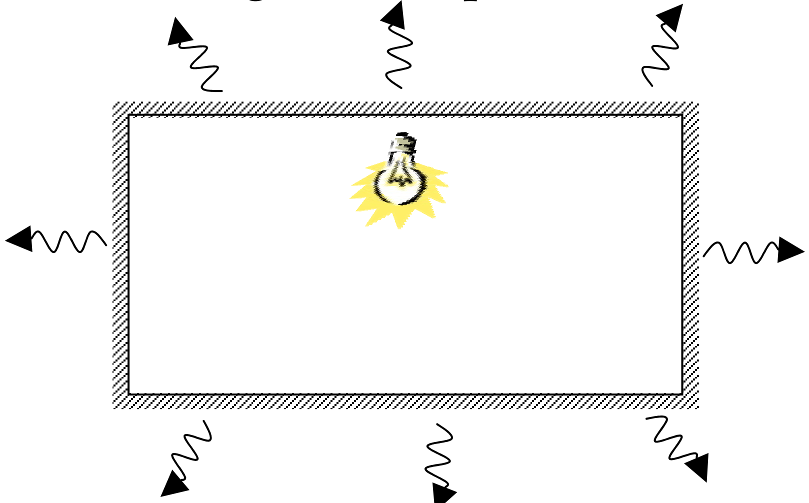
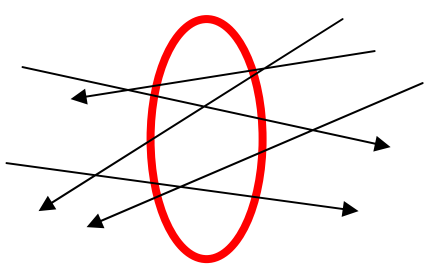
Radiosidade

Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Radiosidade – Resumo

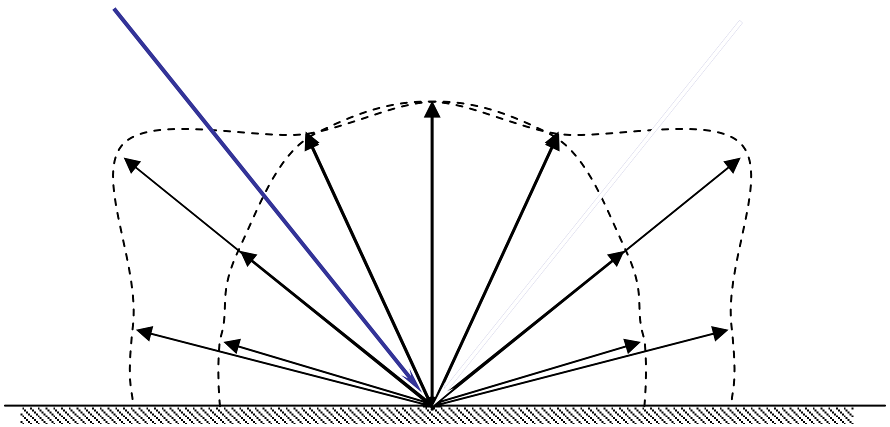
- Modelo de iluminação global
  - Luminosidade aparente de um ponto de uma superfície depende de todos os pontos de todas as superfícies
- Cada objeto da cena é visto como um retalho de superfície que pode emitir e refletir luz
- Cena é um ambiente fechado do ponto de vista termodinâmico
  - Energia que entra no sistema = energia que sai do sistema
  - "Temperatura" das superfícies é invariante no tempo
  - Energia total que atravessa uma curva fechada é nula





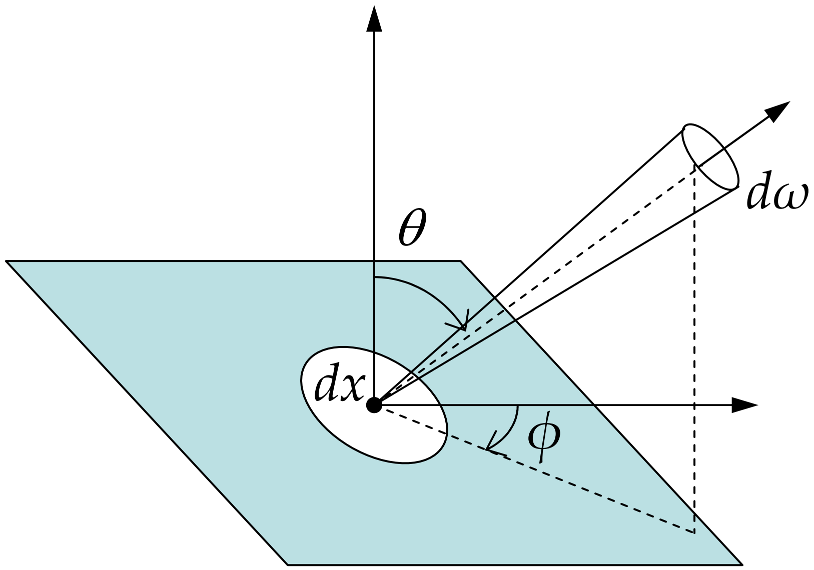
Luminosidade Aparente

- Modelo da luminosidade aparente de um ponto leva em conta, além de sua luz própria, como o ponto reflete a luz (energia) que vem de cada direção
  - BRDF: *Bidirectional Reflectance Distribution Function*



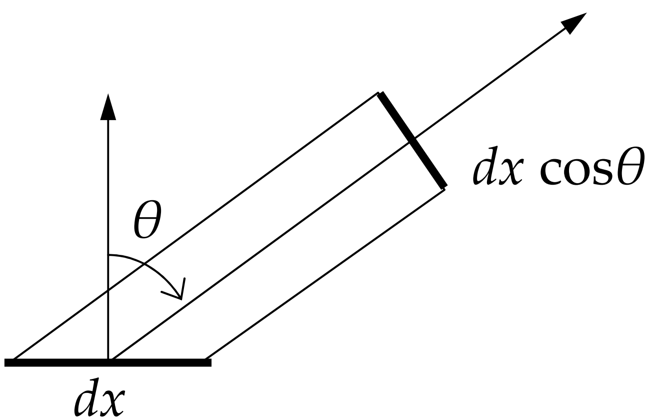
Quantidades diferenciais

- Consideremos apenas um ponto e uma direção
  - Ponto é um elemento diferencial de área (dx)
    - Unidade de área = m^2
  - Direção é um elemento diferencial de ângulo sólido ($d\omega$)
    - Unidade de ângulo sólido = *sr* (estéreo-radiano)



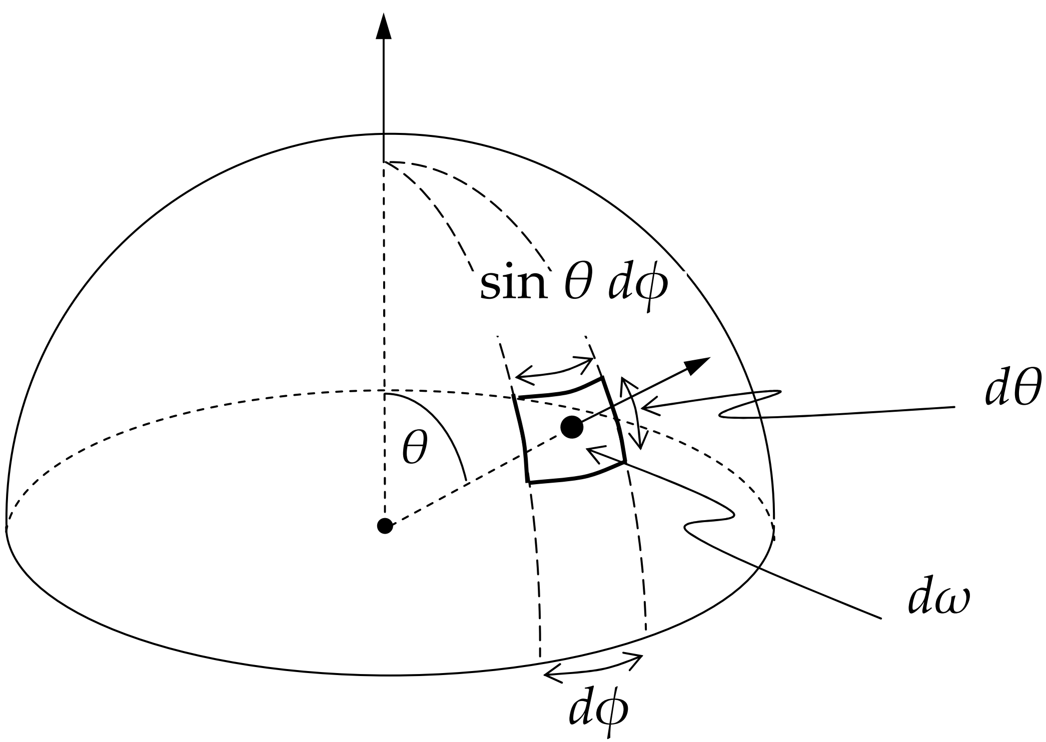
Radiância, Fluxo e Irradiância

- A <u>*radiância*</u> $L\ (x, \theta, \phi)$ é a luminosidade aparente de um ponto numa direção
  - Unidade: $W/(\mathrm{m}^2 \cdot sr)$
- A <u>*potência*</u> (ou *fluxo*) da luz de um ponto x numa determinada direção (θ, ϕ) é dada por
  - $\Phi\ (x, \theta, \phi) = L\ (x, \theta, \phi)\ dx \cos \theta\ d\omega$
  - O termo $\cos \theta$ transforma o elemento de área real dx num elemento de área *aparente*
  - Unidade: W
- A <u>*irradiância*</u> de um ponto x numa direção (θ, ϕ) é a potência irradiada por unidade de área e é dada por
  - $E\ (x, \theta, \phi) = \Phi\ (x, \theta, \phi)\ /\ dx = L\ (x, \theta, \phi) \cos \theta\ d\omega$
  - Unidade: W/m^2



Ângulo sólido como produto de ângulos

- Para expressar o elemento diferencial de ângulo sólido $d\omega$ em termos dos diferenciais de ângulo $d\theta$ e $d\phi$ temos
  - $d\omega = (\sin\theta)\, d\theta\, d\phi$
  - O termo $\sin\theta$ corrige a deformação de $d\phi$ à medida que θ se aproxima de 0



Radiosidade

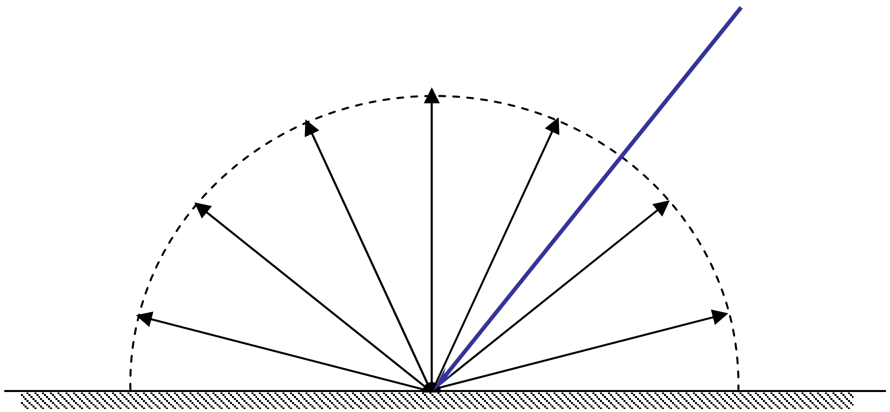
- Portanto, a *irradiância* de um ponto x numa determinada direção (θ, ϕ) é dada por
  - $E(x, \theta, \phi) = L(x, \theta, \phi) \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi$
- A *radiosidade* do ponto x é a irradiância total da luz que sai de x e é computada somando as contribuições da potência direcional $E(x, \theta, \phi)$ por todo o hemisfério Ω sobre x

$$B(x) = \int_{\Omega} L(x, \theta, \phi) \cos\theta d\omega$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{2\pi} L(x, \theta, \phi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Radiosidade de refletores lambertianos

- Na radiosidade clássica, a reflexão é perfeitamente *lambertiana*, isto é, espalha luz incidente uniformemente em todas as direções
  - A radiância $L\ (x, \theta, \phi)$ de um ponto x não depende da direção e pode ser escrita mais simplesmente como $L(x)$
  - A radiosidade $B(x)$ pode ser então ser escrita como



$$B(x) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} L(x)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi$$

$$= L(x)\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi = \pi L(x)$$

Radiância em equilíbrio

- Resumindo: Para refletores lambertianos, a *radiosidade* depende apenas da *radiância*, isto é, $B(x) = \pi L(x)$
- Para montarmos as equações de equilíbrio de energia precisamos correlacionar a radiosidade (ou radiância) de todos os pontos
- A radiância de um ponto x é sua radiância própria (ex., se é uma fonte de luz) somada à radiância devida à reflexão da luz de outros pontos da cena

$$L(x) = L_e(x) + \frac{\rho_d(x)}{\pi} \int_{\Omega} L_i(x, \theta, \phi) \cos\theta d\omega$$

- $L_e(x)$ é a radiância emitida
- $L_i(x, \theta, \phi)$ é a radiância incidente (<u>não</u> uniforme em todas as direções)
- $\rho_d(x)$ é o coeficiente de reflexão difusa (precisamos dividir por π porque o coeficiente relaciona radiosidades e não radiâncias)

Radiosidade em equilíbrio

- Multiplicando a equação de equilíbrio da radiância por π temos

$$\pi L(x) = \pi L_e(x) + \rho_d(x) \int_{\Omega} L_i(x,\theta,\phi) \cos\theta d\omega$$

- Definimos $H(x)$ como a radiosidade incidente em x

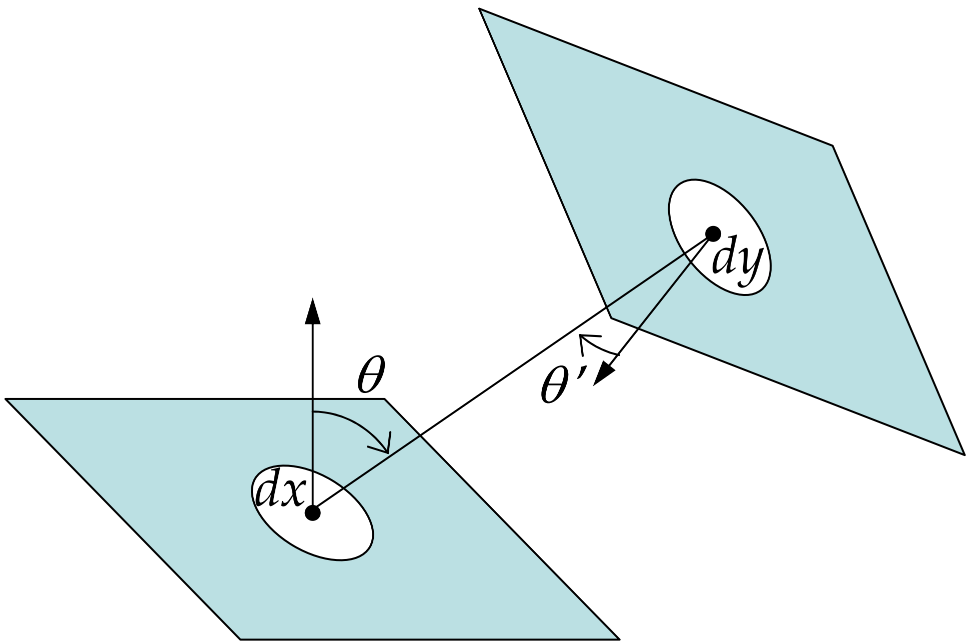
$$H(x) = \int_{\Omega} L_i(x,\theta,\phi) \cos\theta d\omega$$

- Lembrando que $B(x) = \pi\, L(x)$ e definindo a radiosidade emitida $E(x) = \pi\, L_e(x)$ temos

$$B(x) = E(x) + \rho_d(x) H(x)$$

Radiosidade incidente

- A radiosidade incidente $H(x)$ pode ser obtida integrando-se as contribuições de todos os pontos y de todas as superfícies S da cena (ao invés das contribuições provenientes de todos os elementos de ângulo sólido)
  - r é a distância entre x e y
  - θ' e ϕ' são os ângulos análogos a θ e ϕ com relação a y



Radiosidade incidente

- Observamos que:
  - A energia enviada de x para y é idêntica àquela enviada de y para x e portanto
    $$L\,(x, \theta, \phi) = L\,(y, \theta', \phi')$$
  - Se assumimos que todos as superfícies são lambertianas, então
    $$L\,(y, \theta', \phi') = L\,(y) = B(y)/\pi$$
  - A energia trocada entre x e y pode ser bloqueada por um anteparo e portanto precisamos definir uma função de visibilidade $V(x,y)$. Logo,

$$L_i(x,\theta,\phi) = \frac{B(y)}{\pi} V(x,y)$$

Radiosidade incidente

- Lembramos que a radiosidade incidente é dada por

$$H(x) = \int_{\Omega} L_i(x,\theta,\phi)\cos\theta d\omega$$

- Para expressar o elemento diferencial de ângulo sólido $d\omega$ como

$$d\omega = \frac{\cos\theta' dy}{r^2}$$

  - Observe que a área aparente de dy decresce com o quadrado da distância a x
- Podemos portanto exprimir a radiosidade incidente em x como uma integral das contribuições de todos os pontos y:

$$H(x) = \int_{y\in S} B(y)\frac{\cos\theta\cos\theta'}{\pi r^2}V(x,y)dy$$

Fator de forma

- Na prática, ao invés de relacionar elementos diferenciais de área (i.e., dx e dy), o método da radiosidade relaciona pequenos retalhos de área
- Se P_i e P_j são retalhos de superfície com áreas A_i e A_j, respectivamente então define-se o fator de forma $F_{i,j}$ como a fração de energia que sai de P_j e atinge P_i
  - $F_{i,j}$ é adimensional
- Sob a hipótese do equilíbrio de energia e assumindo que a radiosidade de cada retalho é constante por toda sua superfície, temos

$$A_i F_{i,j} = A_j F_{j,i} = \int_{x \in P_i} \int_{y \in P_j} \frac{\cos\theta \cos\theta'}{\pi r^2} V(x,y)\,dy\,dx$$

Sistema de equações

- Podemos então definir um sistema de equações lineares que espelha o balanço de energia global na cena

$$A_i B_i = A_i E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{j,i} A_j$$

- Como sabemos que $A_i F_{i,j} = A_j F_{j,i}$, podemos simplificar a equação acima:

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{i,j} \quad \text{ou} \quad E_i = B_i - \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{i,j}$$

  - n retalhos
  - ρ_i é o fator de refletividade do retalho i
  - B_i é a radiosidade total (constante) do retalho i
  - E_i é a radiosidade emissiva do retalho i (não nula apenas se o retalho é fonte de luz)

Sistema de equações em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1-\rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$

- Observe que os elementos da diagonal principal valem 1 se $F_{i,i} = 0$
  - Válido a menos que o retalhos seja côncavo
- A grande dificuldade reside em computar os fatores de forma!