Arranjos

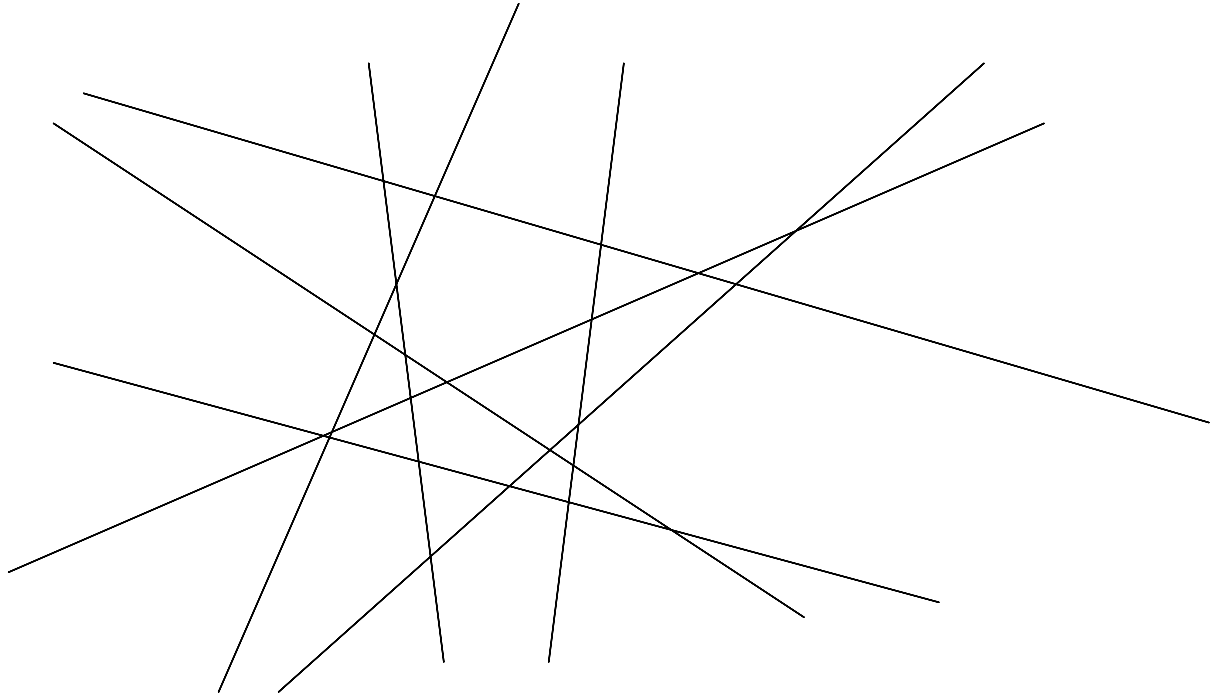
Claudio Esperança
Paulo Roma

Arranjos

- Arranjos de retas e planos são a terceira estrutura em importância em GC.
- Arranjos de retas são coleções de retas <u>infinitas</u> distribuídas no plano.
- Arranjos induzem uma **partição do espaço** em regiões convexas (faces), segmentos de reta (arestas), e pontos (vértices nas interseções das retas).
- A <u>partição induzida</u> é chamada de **arranjo**, e consideram-se as faces e arestas como conjuntos abertos (células disjuntas duas a duas).

Aplicações

- Grafos de visibilidade.
- Remoção de superfícies escondidas.
- Polígonos convexos vazios.
- Corte do sanduíche de presunto.
- k-Corredor mínimo.
- Linha cortante máxima.



Combinatória

- Em arranjos **simples** cada par de retas se intersectam em exatamente um ponto e não passam mais de duas retas pelo mesmo ponto.
- Arranjos degenerados podem conter retas paralelas ou três retas passando pelo mesmo ponto, mas dificultam a prova dos teoremas.

Teorema 1

- Um arranjo simples com n retas possui:
  - $F = \binom{n}{2} + n + 1$ faces
  - $A = n^2$ arestas
  - $V = \binom{n}{2}$ vértices
  - Nenhum arranjo degenerado excede essas quantidades.

Prova

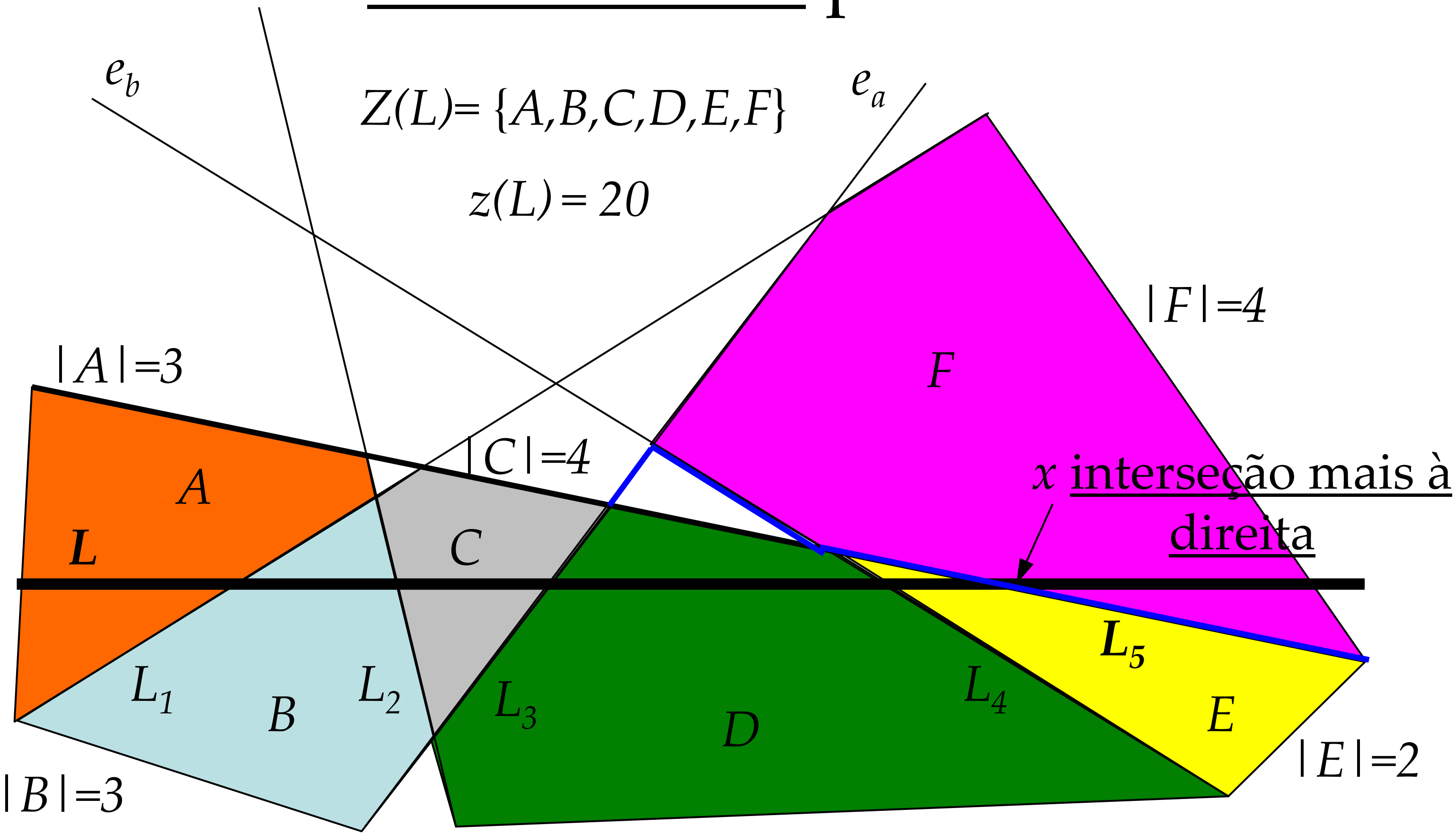
- O número de vértices é imediato pois cada par de retas se intersecta em exatamente um ponto.
- O número de arestas pode ser verificado por indução:
  - Assuma um arranjo simples S com n - 1 retas e $(n - 1)^2$ arestas. Insira uma nova reta L em S.
  - Uma nova aresta é criada em cada uma das n - 1 retas e L é dividida em n arestas por S.
  - Assim, $A = (n - 1)^2 + (n - 1) + n = n^2$.
- O número de faces pode ser verificado pela fórmula de Euler: $V - A + F = 2$.

Propriedades

- Arranjos são fundamentalmente quadráticos:
  - V, A e F são $\Theta(n^2)$.
- A construção eficiente de arranjos é possível porque nenhuma reta corta as células em muitas pontos.
- De fato, o teorema da zona garante que o número de interseções é linear no número de retas.

Zona de Uma Reta

- Seja S um arranjo simples com n retas e uma reta $L \notin S$. A **zona** $Z(L)$ é o conjunto de células de S intersectadas por L.

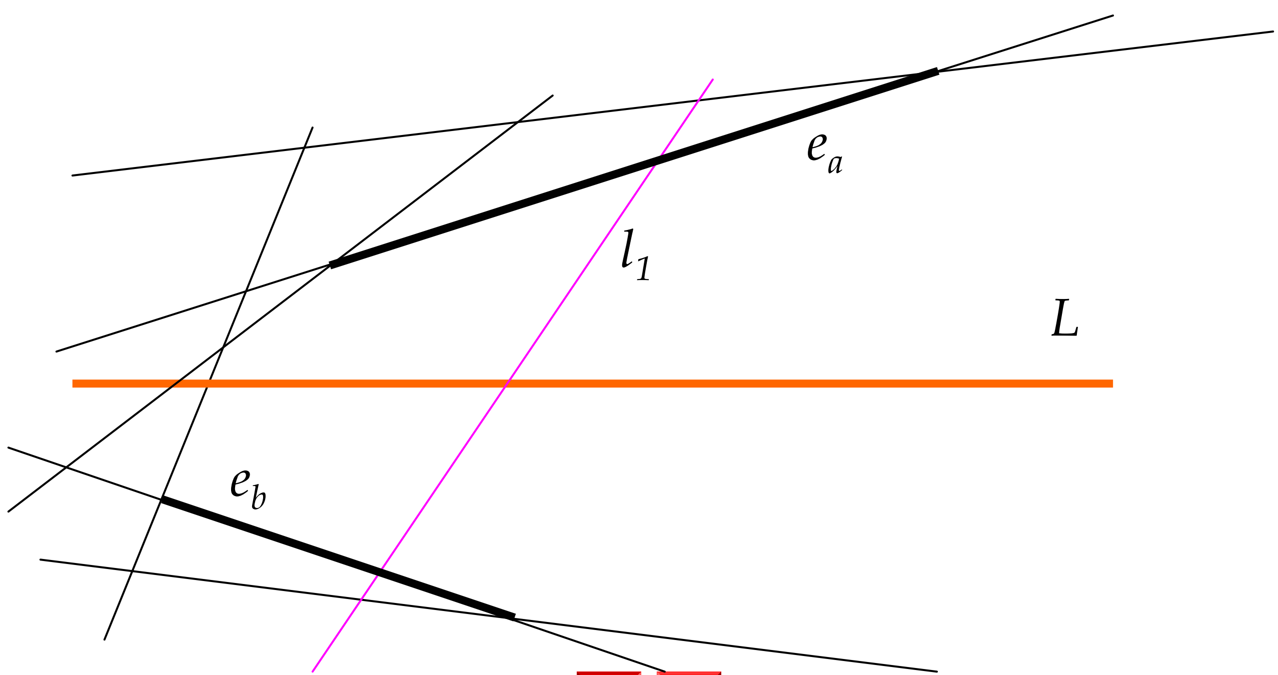


Teorema da Zona

- O número total de arestas em todas as células que intersectam uma reta de um arranjo de n retas é $O(n)$: $z_n \leq 6n$.
  - Note-se que cada aresta na fronteira de duas células adjacentes não deve ser contada duas vezes.
- A prova assume L horizontal (basta mudar o sistema de coordenadas adequadamente).
- A zona de L é dividida em arestas que limitam faces à direita e à esquerda.
  - Como as faces são convexas, basta dividir cada face no vértice mais alto e mais baixo para se ter duas cadeias convexas de arestas.

Prova do Teorema da Zona

- O conjunto das arestas esquerdas de $Z(L)$ possui no máximo $3n$ arestas.
- No caso base $n = 1$, há apenas uma aresta esquerda. Assuma-se verdadeiro para um conjunto de $n - 1$ retas retirando-se a reta l_1, aquela mais à direita de S.



Prova do Teorema da Zona

- Pela hipótese indutiva há apenas $3(n-1)$ retas esquerdas em $Z(L)$.
- Agora inclua-se de novo l_1 e veja-se quantas arestas esquerdas a mais aparecem.
  - Considere-se a face <u>mais à direita</u> do arranjo de $n-1$ retas. A reta l_1 intersecta L nesta face.
- Sejam e_a e e_b as duas arestas dessa face intersectadas por l_1, uma acima e a outra abaixo de L.
- A inclusão de l_1 cria uma nova aresta esquerda ao longo de l_1 e divide e_a e e_b em duas novas arestas esquerdas.
  - Há então um incremento total de <u>3 arestas</u>.

Prova do Teorema da Zona

- Note-se que l_1 não pode contribuir com nenhuma outra aresta esquerda porque, dependendo da inclinação, a aresta e_a ou a aresta e_b ficará invisível de L.
  - Porém, podem aparecer outras arestas direitas, que não estão sendo contadas.
- Assim, o número total de arestas esquerda da zona de L é no máximo $3(n-1)+3 \leq 3n$.

Construção Incremental

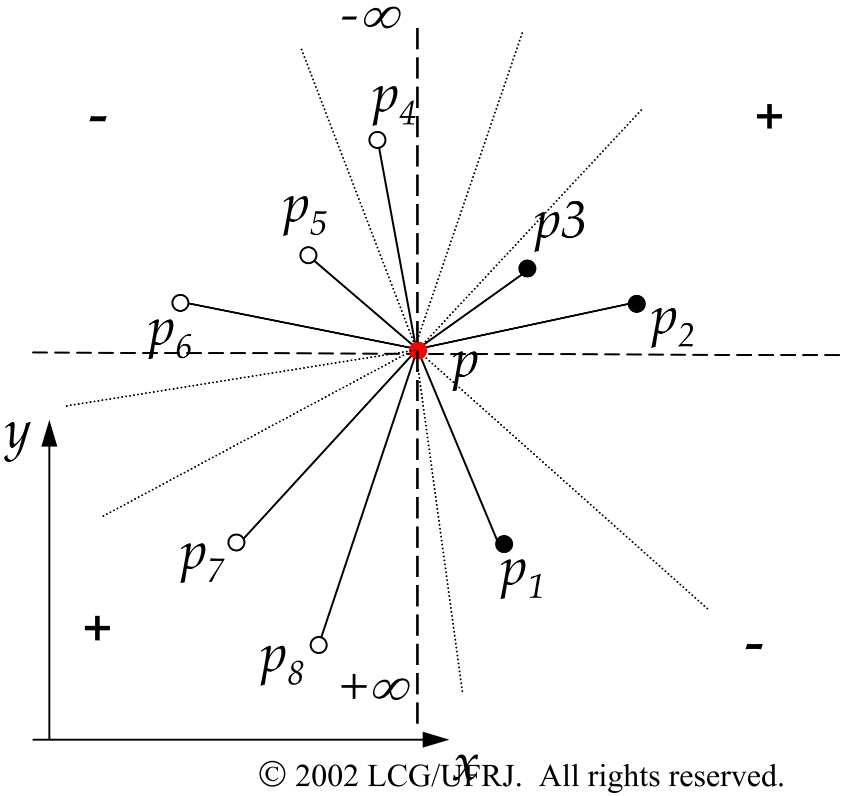
- O arranjo deve ser representado por uma estrutura de dados adequada. Seja $L = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$.
- Deve ser adicionada uma reta por vez, não importando a ordem.
- Suponha-se que $i - 1$ retas já foram adicionadas e calcule-se o esforço para incluir l_i. Pode-se considerar que há uma caixa envolvendo o arranjo.
- Cada reta intersecta a caixa duas vezes. Logo, as $i - 1$ retas dividem a caixa em $2(i - 1)$ arestas. Determina-se então onde l_i intersecta a caixa e quais dessas arestas são intersectadas. Isso determina qual a face do arranjo que l_i atravessa primeiro.

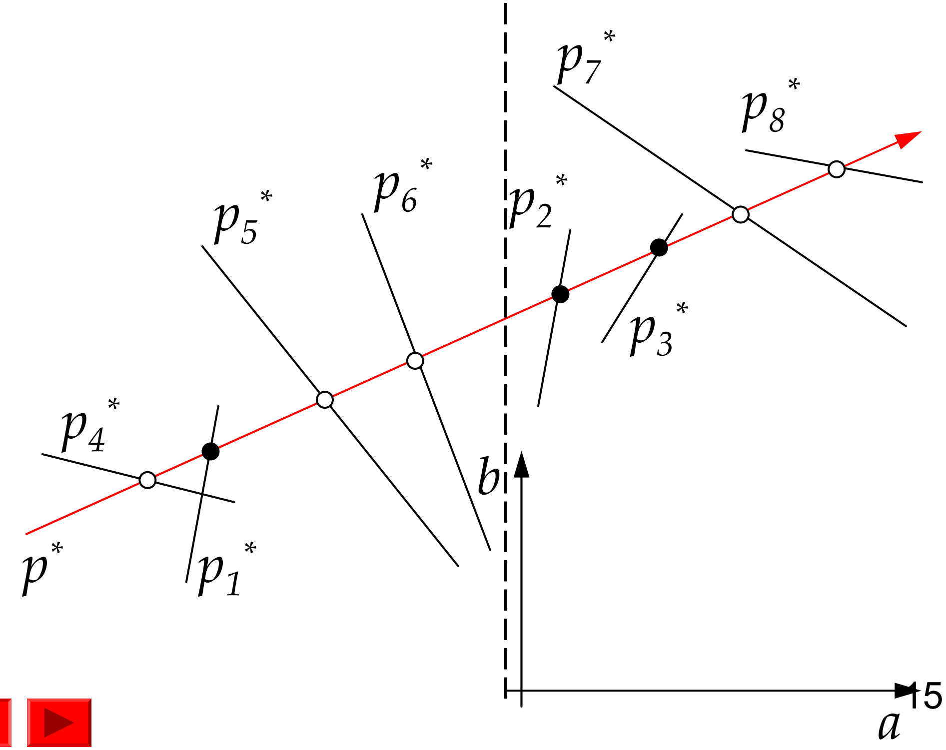
Complexidade

- Assim, pode-se pular de face em face do arranjo por adjacência.
  - A aresta de saída de uma face é determinada caminhando-se por todas as arestas da face no sentido anti-horário. Quando encontrada, basta pular para a face do outro lado da aresta.
- Nesse processo, são encontradas no máximo $i - 1$ retas que delimitam i faces (como sempre o arranjo é considerado simples).
- Pelo teorema da zona, cada face é limitada por no máximo $O(i)$ arestas.
  - Logo, a complexidade total de pior caso é $\sum_{i=1}^{n} i = O(n^2)$, que é o tamanho do arranjo e portanto assintoticamente ótima.

Ordenando Seqüências Angulares

- Seja um conjunto de n pontos do plano. Para cada ponto deseja-se executar uma varredura angular, no sentido anti-horário, visitando todos os outros $n-1$ pontos do conjunto.





Ordenação Angular

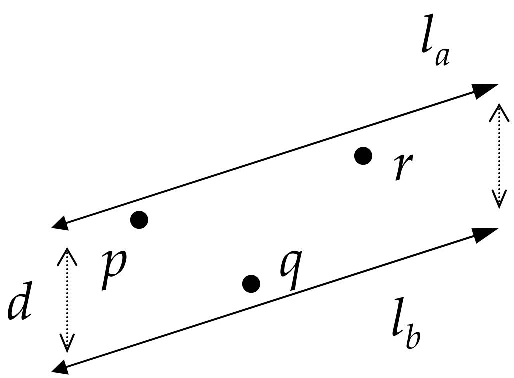
- Para cada ponto é possível determinar os ângulos entre esse ponto e todos os demais $n - 1$ pontos e ordenar os ângulos.
  - $O(n \log n)$ por ponto.
  - Total de $O(n^2 \log n)$.
  - Com arranjos é possível $O(n^2)$.
- No plano primal, um ponto $p = (p_x, p_y)$ e uma linha l: $(y = ax - b)$ são mapeados em uma linha dual p^* e um ponto dual l^*.
  - $l^* = (a,b)$.
  - $p^* : (b = p_x a - p_y)$.

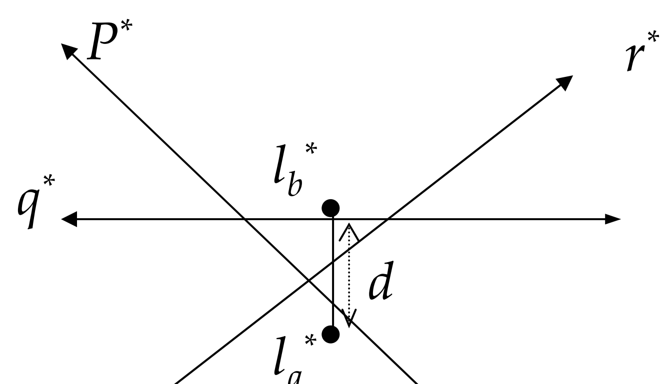
Ordenação Angular

- Seja a reta dual p^* e seus pontos de interseção com cada reta dual p_i^*. Surge uma seqüência de vértices no arranjo ao longo de p^*.
  - A coordenada a de cada vértice no arranjo dual é a inclinação de alguma reta pp_i.
  - Da esquerda para a direita, os vértices ao longo da reta p^* estão ordenados por <u>inclinação</u>.
  - Dada a ordenação por inclinação, pode-se testar quais pontos primais estão à esquerda de p (coordenada x menor) e separá-los dos pontos à direita de p.
  - Concatene-se a seqüência ordenada direita com a seqüência ordenada esquerda.
  - O resultado é uma seqüência angular ordenada de -90º a 270º.

3-Corredor Mais Estreito

- Seja um conjunto de n pontos no plano e um inteiro k, $1 \leq k \leq n$. Deseja-se determinar o par de retas paralelas mais estreitas que contêm pelo menos k pontos do conjunto.
  - Será usada a distância vertical ao invés da perpendicular.
  - Aqui k = 3, os pontos estão em posição geral, e dois pontos não têm a mesma coordenada x.





Corredor Mais Estreito

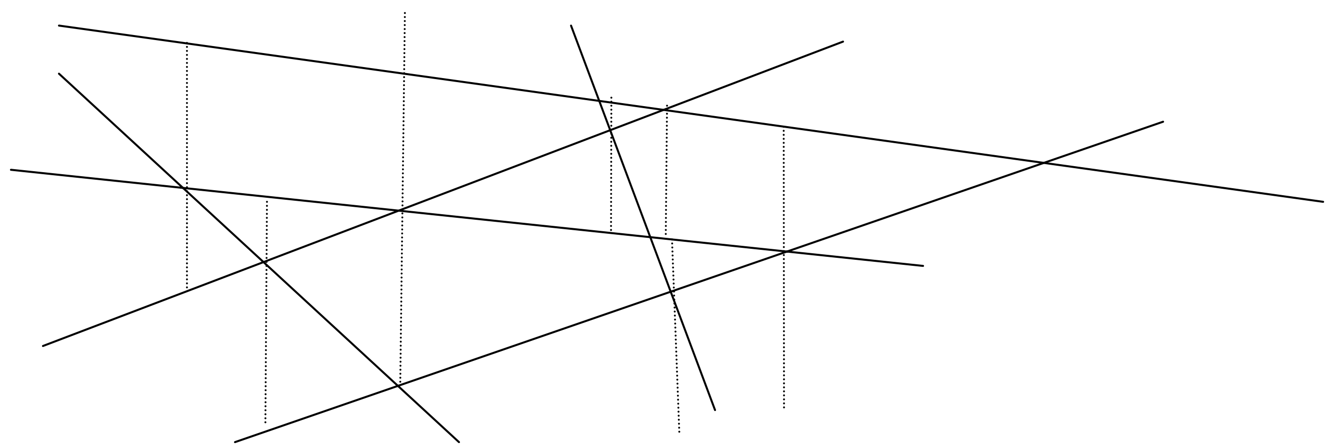
- No espaço dual há um conjunto de n retas.
  - A inclinação de cada reta é a coordenada x do ponto correspondente.
  - O 3-corredor mais estreito no plano primal são duas retas <u>paralelas</u> l_a e l_b.
  - Seus duais são os pontos l_a^* e l_b^* de mesma <u>coordenada x</u>.
  - A distância vertical é a diferença dos deslocamentos y das duas retas primais.
  - A distância vertical do corredor é igual a distância vertical do segmento de reta.

Corredor Mais Estreito

- No plano primal há 3 pontos no corredor acima de l_b e abaixo de l_a.
  - Pela reversão da ordem, no plano dual há três retas duais que passam abaixo de l_b^* e acima de l_a^*.
- Esse problema é equivalente ao das linhas cortantes mais curtas.
  - Dadas n linhas, determinar o segmento vertical mais curto que corta três linhas do arranjo.
  - Uma das extremidades está sobre um vértice do arranjo e a outra extremidade está sobre uma reta do arranjo.
  - No problema do corredor uma das retas passa por dois pontos e a outra reta passa por um ponto.

Linha Cortante Mais Curta

- A linha cortante mais curta pode ser determinada por varredura, usando-se uma linha vertical.
  - Sempre que se encontra um vértice do arranjo calcula-se a distância às retas imediatamente acima e abaixo desse vértice.
  - O problema pode ser resolvido em tempo O(n^2) e espaço O(n).



Caminhos Mais Curtos

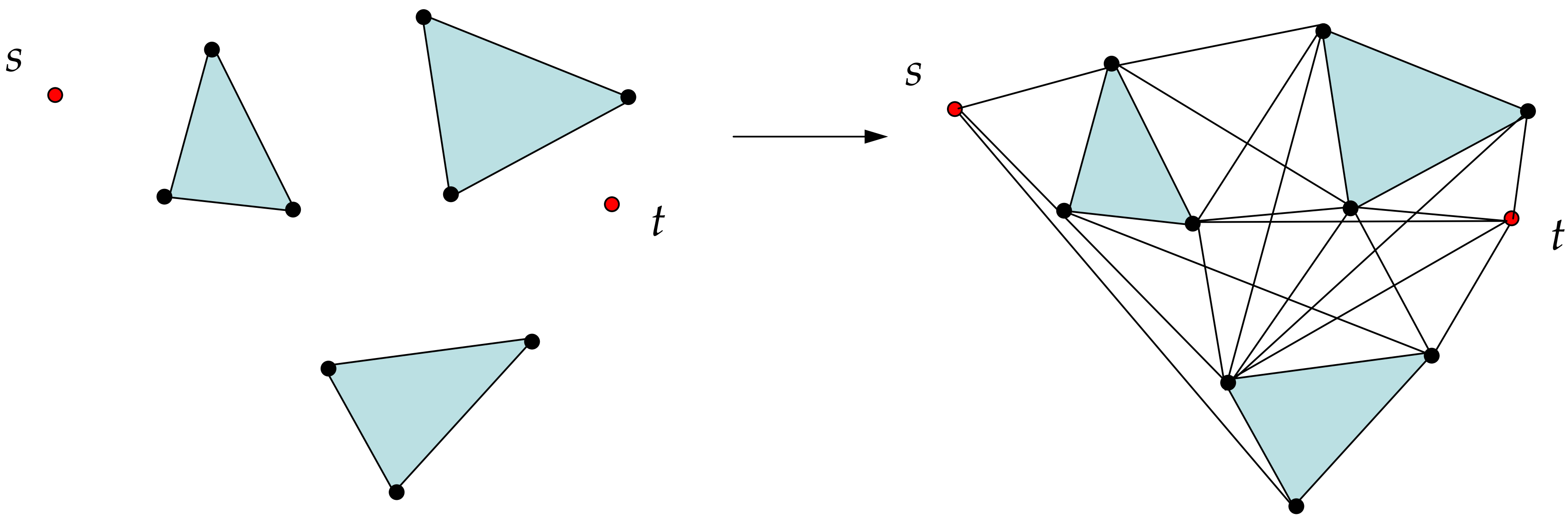
- Dados *n* obstáculos poligonais disjuntos no plano e dois pontos *s* e *t*, determinar o caminho mais curto de *s* até *t* <u>que evite o interior de todos os obstáculos</u>.
- O complemento do interior dos obstáculos forma o **espaço vazio**.
- A métrica utilizada é a distância Euclidiana.
  - Caminho mais curto é uma curva poligonal.
  - As arestas da curva poligonal mais curta possuem vértices coincidentes com vértices dos obstáculos, *s* e *t* e não intersectam o interior dos obstáculos.

Grafo de Visibilidade

- O grafo de visibilidade GV definido por *s* e *t* e pelo conjunto dos obstáculos possui vértices coincidentes com *s*, *t* e com os vértices dos obstáculos.
- Existe uma aresta entre dois vértices do grafo se eles forem <u>visíveis</u> um ao outro ou se forem vértices de arestas dos obstáculos.
- O caminho mais curto pode ser descoberto a partir do grafo de visibilidade.
- O grafo de visibilidade <u>não é planar</u> e por isso pode possuir $\Omega(n^2)$ arestas.

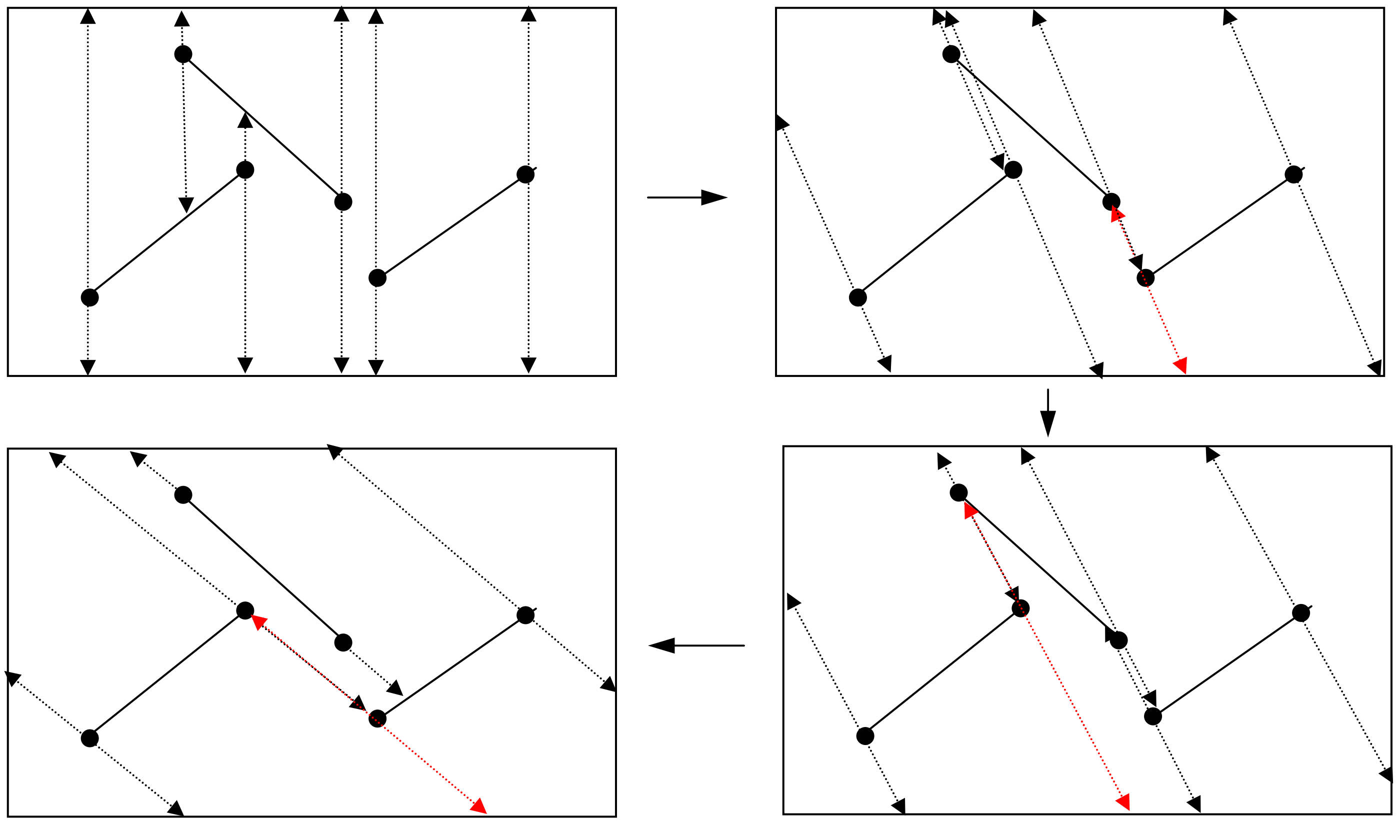
Conjunto de Obstáculos

- Cada aresta do grafo de visibilidade é etiquetada com o seu comprimento Euclidiano e o caminho mais curto pode ser encontrado pelo algoritmo de Dijkstra.



Computando GV

- O algoritmo dispara raios a partir de todos os vértices com inclinação variando de $-\infty$ a $+\infty$, no sentido anti-horário (varredura angular múltipla).



Computando GV

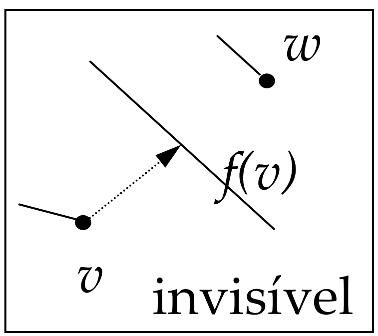
- Um evento significante ocorre sempre que o tiro pula de uma aresta para outra. Isso acontece quando o ângulo atinge a inclinação da reta que liga dois vértice visíveis v e w.
  - É complicado descobrir que vértices são visíveis.
  - Por isso ocorrem eventos em todos os ângulos entre dois vértices, visíveis ou não.
  - Por dualidade, a inclinação de um evento corresponde a coordenada a da interseção das linhas v^* e w^*.
  - Assim, varrendo o arranjo todos os eventos são gerados.

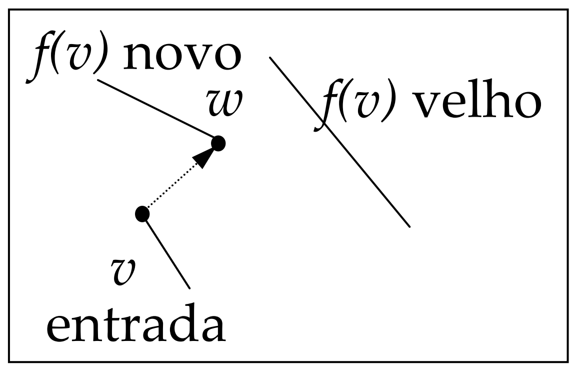
Cenários dos Eventos

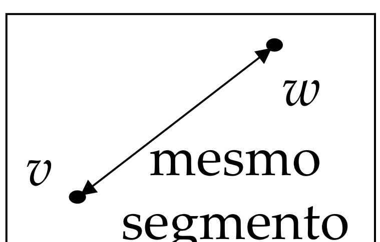
- Há dois tiros emanando de cada vértice *v*: um para frente, que atinge a reta *f*(*v*), e outro para trás, que atinge a reta *t*(*v*).
  - Se o tiro não atingir reta alguma usa-se um valor nulo.
  - Se *v* e *w* são extremidades do mesmo segmento, então são visíveis e a aresta (*v*, *w*) é adicionada ao grafo.
- Vértices não visíveis.
  - Determina-se se *w* está no mesmo lado de *f*(*v*) ou *t*(*v*). Assuma-se *f*(*v*), pois o outro caso é simétrico.
  - Calcula-se o ponto de contato do tiro a partir de *v* na direção θ com o segmento *f*(*v*). Se o choque com *f*(v) ocorrer estritamente antes de *w*, então descobriu-se que *w* não é visível de *v* (não é um evento).

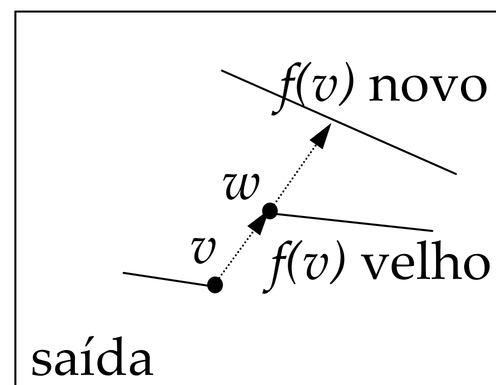
Cenários dos Eventos

- Segmento de entrada.
  - Considere-se um segmento incidente em *w*. Ou a varredura está para entrar no segmento ou está acabando de deixá-lo. Se está entrando, o segmento é o novo $f(v)$.
- Segmento de saída.
  - Se a linha de varredura está deixando o segmento, um novo tiro deve ser dado para achar o próximo segmento intersectado.
  - Como varre-se *w* ao mesmo tempo de *v*, sabe-se que o tiro de *w* atinge $f(w)$. Basta então fazer $f(v) = f(w)$.









Complexidade

- Fila de prioridade para eventos.
- Ponteiros para $f(v)$ e $t(v)$ em cada vértice.
- Fila de prioridade está disponível no arranjo de retas dos duais dos vértices dos segmentos.
- Com uma varredura topológica do arranjo, todos os eventos são processados em $O(n^2)$.
  - Note-se que a varredura angular de todos os vértices pode ser feita em $O(n^2)$.