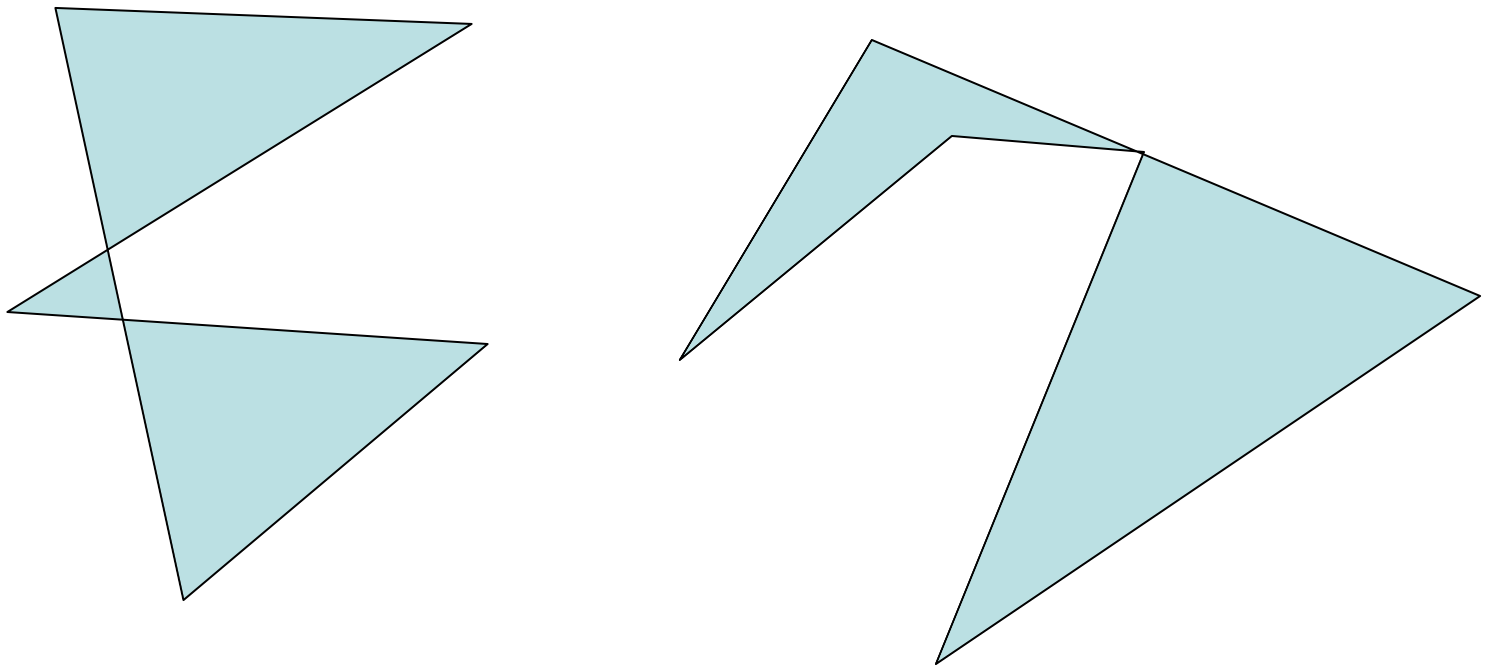
Geometria Computacional
Galeria de Arte

Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Polígonos

- Um polígono é uma região do plano limitada por uma coleção finita de n segmentos de reta $\{e_i\}$ formando uma curva **simples** sem bordo.
  - $e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1} \forall i = 0, \ldots, n - 2$ ($e_{n-1} = v_0 v_{n-1}$).
  - $e_i \cap e_j = \emptyset \; \forall j \neq i + 1$.
  - e_i são as arestas e v_i os vértices do polígono.
- Curvas simples sem bordo dividem o plano em duas regiões (teorema de Jordan).

Polígonos não Simples

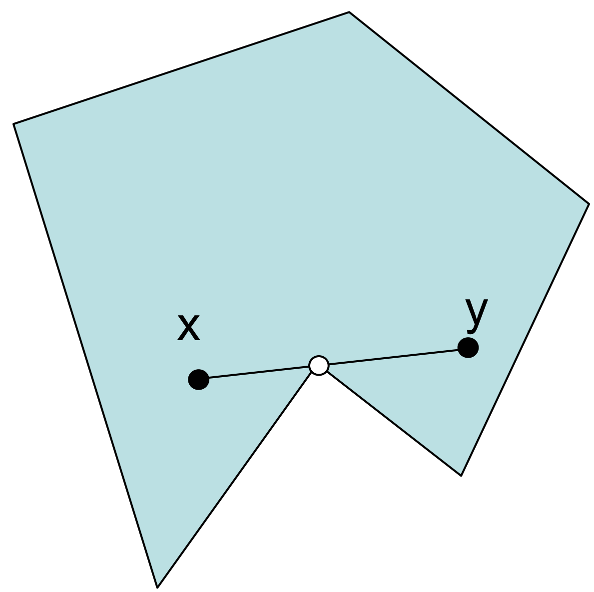


Problema da Galeria de Arte

- Seja uma galeria de arte modelada por um polígono de n vértices. Quantos guardas <u>estáticos</u> são necessários para vigiar a galeria?
  - Cada guarda é um ponto fixo e pode ver em todas as direções, mas as arestas do polígono bloqueiam a sua visibilidade.

Visibilidade

- Um ponto x pode ver um ponto $y \Leftrightarrow$ o segmento fechado xy está completamente contido no polígono P.

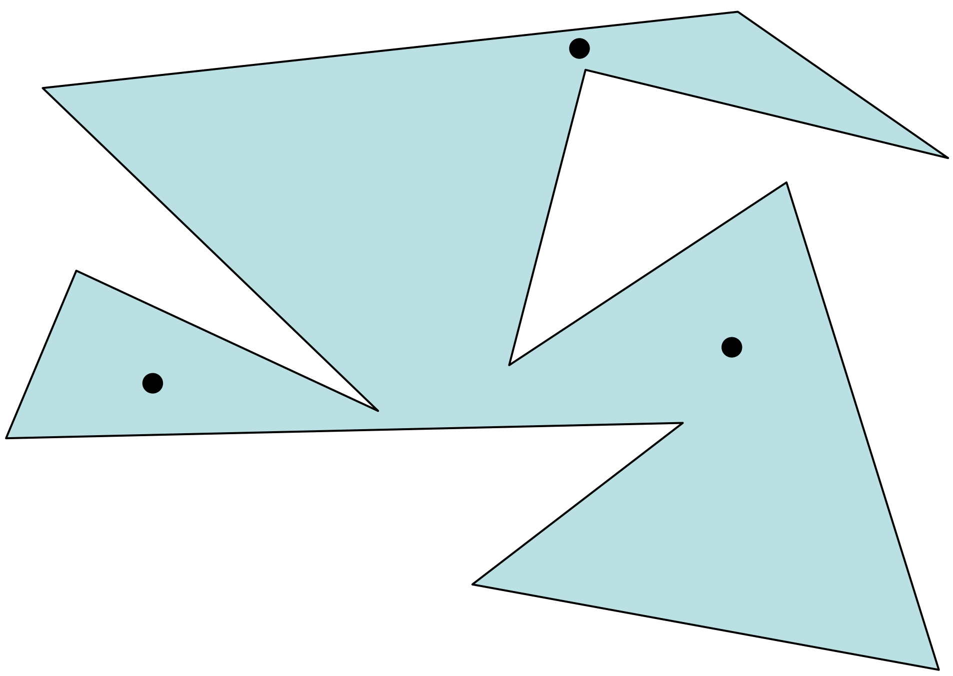


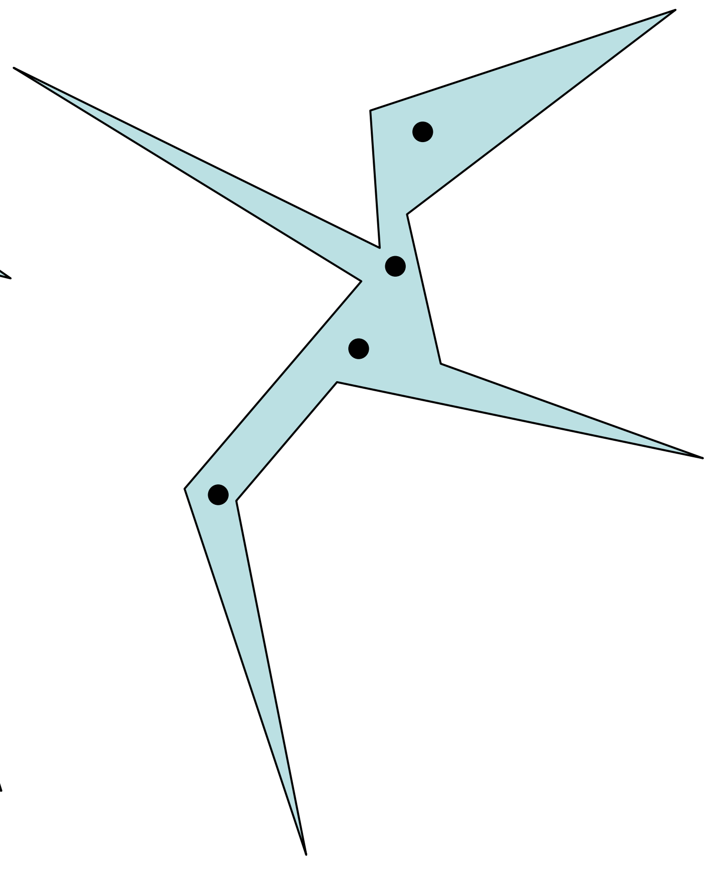
Max Sobre Min

- O problema da Galeria de Arte de Klee é achar o máximo, sobre todos os polígonos de n vértices, do número mínimo de guardas necessários para cobrir o polígono.

Exemplos

- 12 vértices $\Rightarrow$ 3 ou 4 guardas.





Formalização

- Seja $g(P)$ o menor número de guardas para P: $g(P) = \min_S |\{S : S \text{ cobre } P\}|$.
- $G(n)$ é o máximo de $g(P_n)$ sobre todos os polígonos de n vértices:

$$G(n) = \max_{\mathrm{Pn}} g(P_n).$$

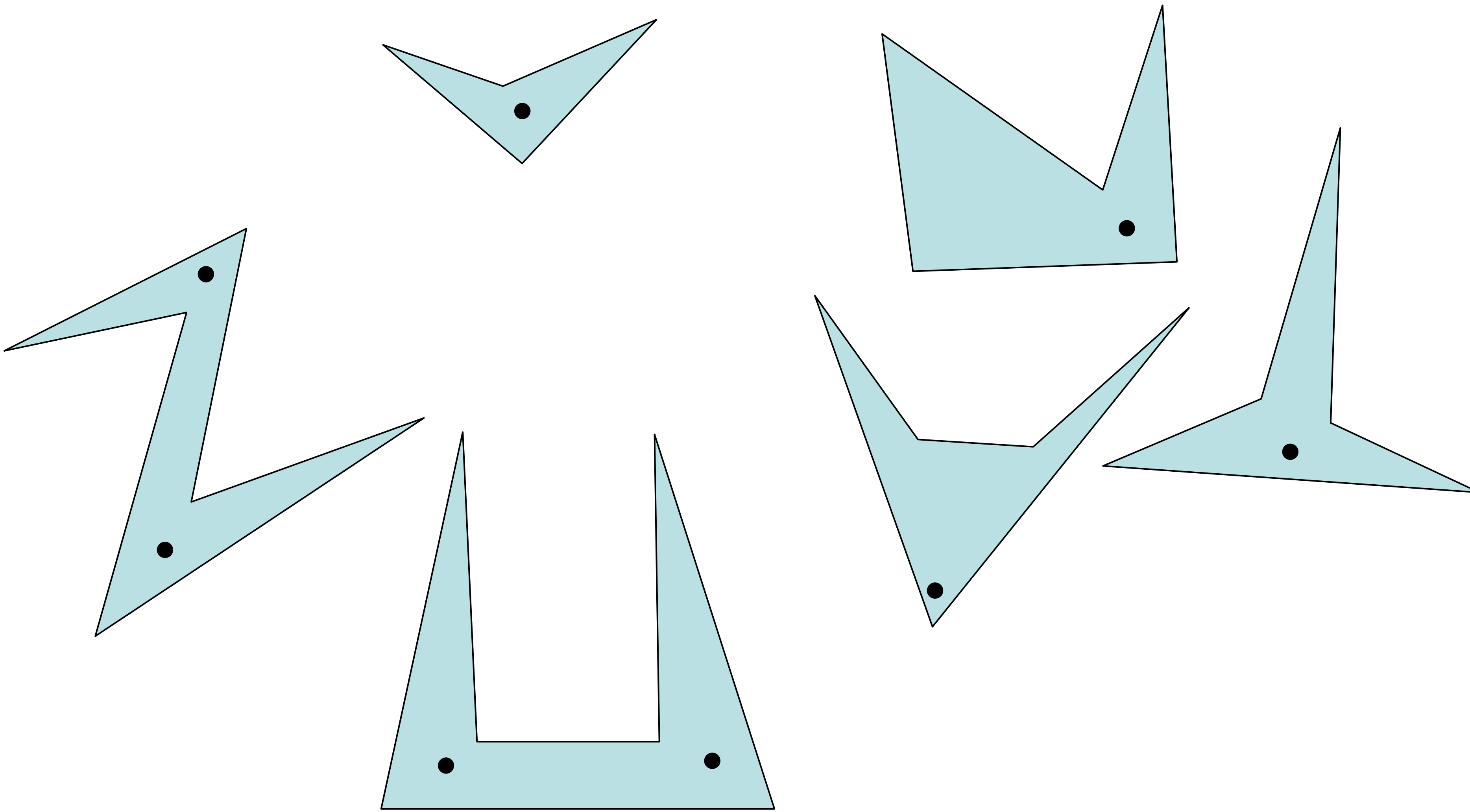
- O problema da Galeria de Arte é determinar a função $G(n)$.

Exploração Empírica

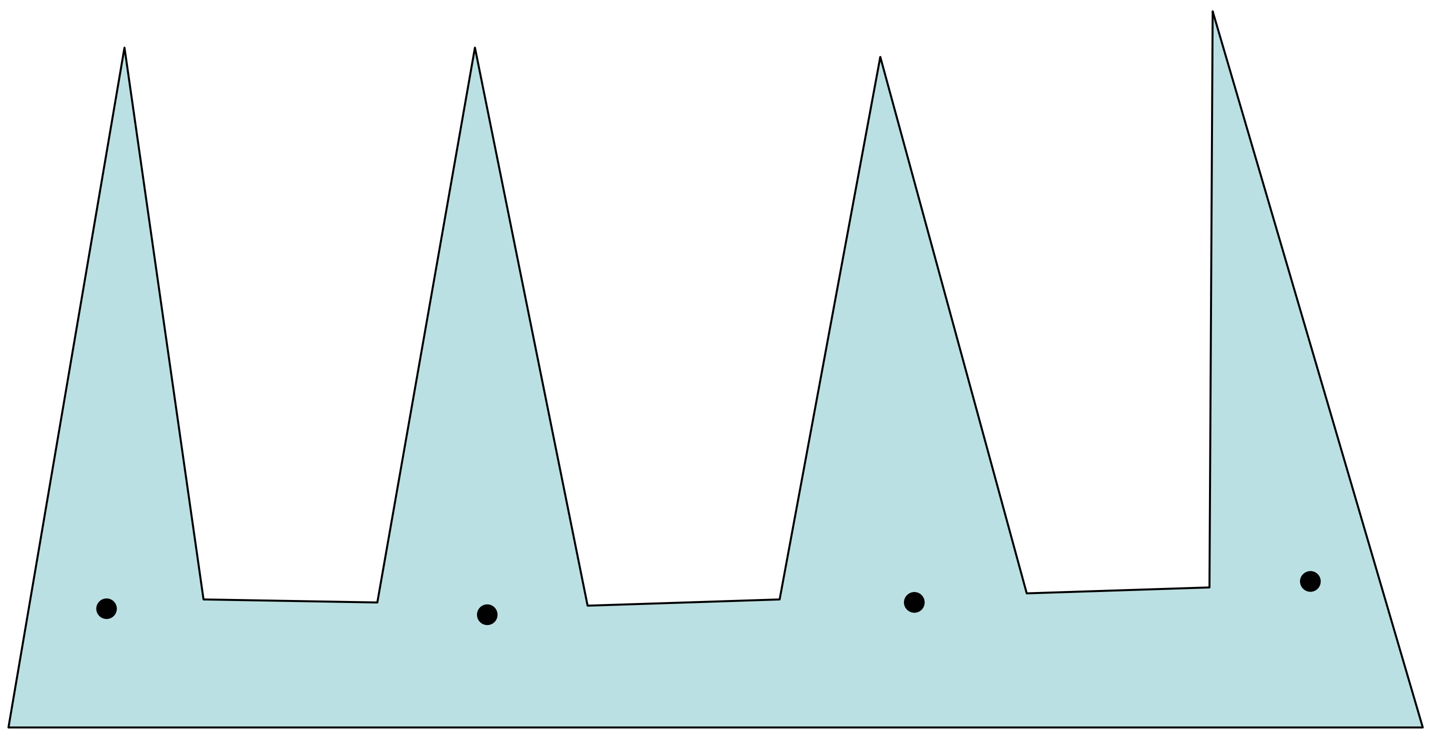
- No mínimo 1 guarda é necessário
  - $1 \leq G(n)$.
- n guardas são suficientes para qualquer polígono (1 em cada vértice)
  - $G(n) \leq n$ (intuitivo, mas falha em $3D$).
- $G(3) = 1$, $G(4) = 1$, $G(5) = 1$, $G(6) = 2$.
- Pente com k dentes tem $n = 3k$ arestas
  - Cada dente requer um guarda:

$$n/3 \leq G(n).$$

4, 5 e 6 vértices



Pente de 12 vértices



Prova de Fisk

- Se baseia na partição do polígono em triângulos por diagonais.
  - **Diagonal** é um segmento entre dois vértices propriamente visíveis um ao outro.
    - $ab \cap \partial P \subseteq \{a,b\}$ (segmento aberto ab, não intersecta a fronteira de P).
  - Duas diagonais não se cruzam se sua interseção é um subconjunto das suas extremidades.
  - Adicionando diagonais, particionamos o polígono em triângulos, formando uma triangulação.

Colorização de Grafos

- Assuma-se dado um polígono de n vértices. Triangule-se este polígono.
- O grafo resultante pode ser **colorido** por três cores apenas (vértices de qualquer aresta com cores diferentes).
- Coloque-se um guarda em todos os vértices correspondendo à cor menos usada (cada triângulo possui as 3 cores).

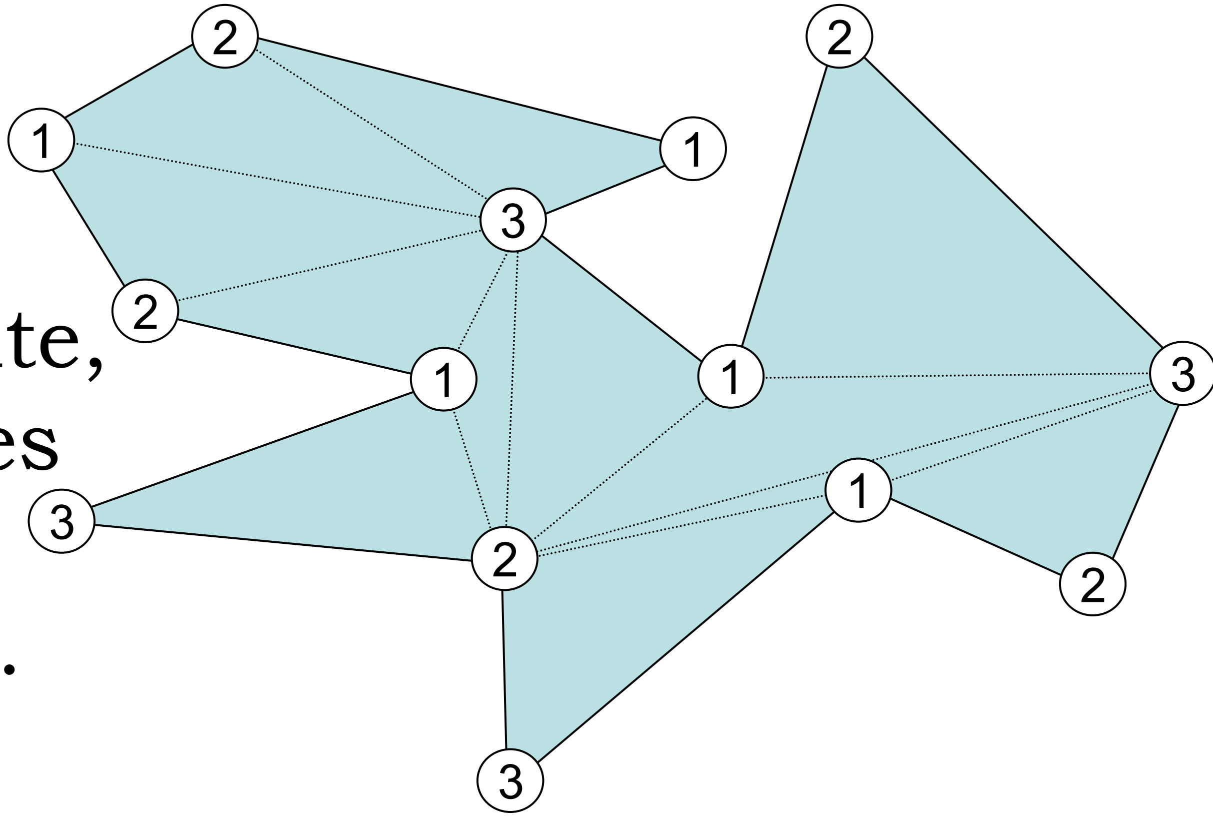
Colorindo Vértices

- Colorindo o primeiro triângulo arbitrariamente, as outras cores ficam determinadas.

    $n = 14$,

    $c_1 = c_2 = 5$,

    $c_3 = 4$.



Finalização

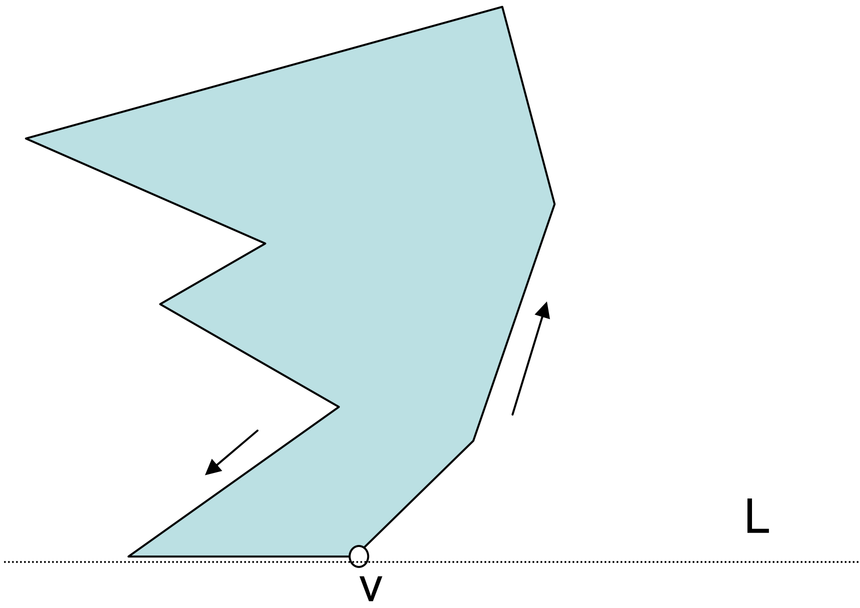
- Se n objetos são colocados em k recipientes, pelo menos um recipiente não pode conter mais de n/k objetos.
- Os vértices da triangulação são os objetos, e os recipientes as 3 cores.
  - Logo, pelo menos uma cor não é usada mais de $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes.
- G(n) = $\lfloor n/3 \rfloor$.

Existência de Uma Diagonal

- Um polígono *P* deve ter pelo menos um ângulo **estritamente convexo** $(0, \pi)$.
  - Suponha *P* orientado no sentido anti-horário.
  - Um vértice convexo é uma curva para à esquerda, e um reflexo para direita.
  - O interior de P está sempre à esquerda de um ponto percorrendo a borda de *P*.

Vértice Mais à Direita e Mais Baixo.

- L passa pelo vértice mais baixo de P (y_{min}).
- Interior de P está acima de L.
- Próximo vértice está acima de P.
- Logo, há uma curva para à esquerda em v, que é estritamente convexo.

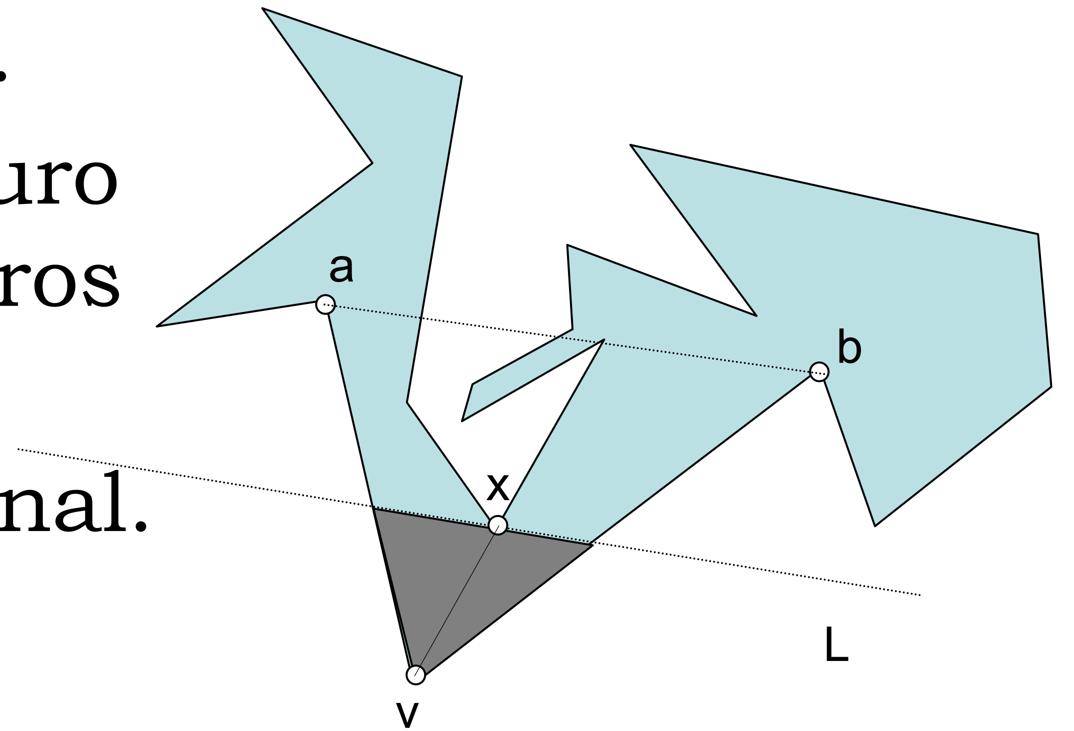


Lema de Meisters

- Todo polígono P com $n \geq 4$ vértices possui uma diagonal.
  - Seja v o vértice estritamente convexo e a e b os vértices adjacentes. Se ab é diagonal, fim. Senão, ab é exterior ou intersecta ∂P.
  - Em qualquer caso, Δavb contém pelo menos um outro vértice de P.
  - Seja $x \subset \Delta avb$ o vértice mais próximo de v.

Construção Geométrica.

- x é primeiro vértice atingido por uma reta L, paralela à ab.
- O triângulo escuro não contém outros vértices de ∂P.
- *Logo*, vx é diagonal.



Triangulação

- Qualquer polígono P com n vértices pode ser particionado em triângulos pela adição de zero ou mais diagonais.
  - Indução: Seja $n \geq 4$ e $d = ab$ uma diagonal, que particiona P em dois polígonos.
  - Cada polígono possui d como aresta e tem menos de n vértices.
  - Aplicando-se a hipótese indutiva aos dois sub-polígonos completa-se a prova.

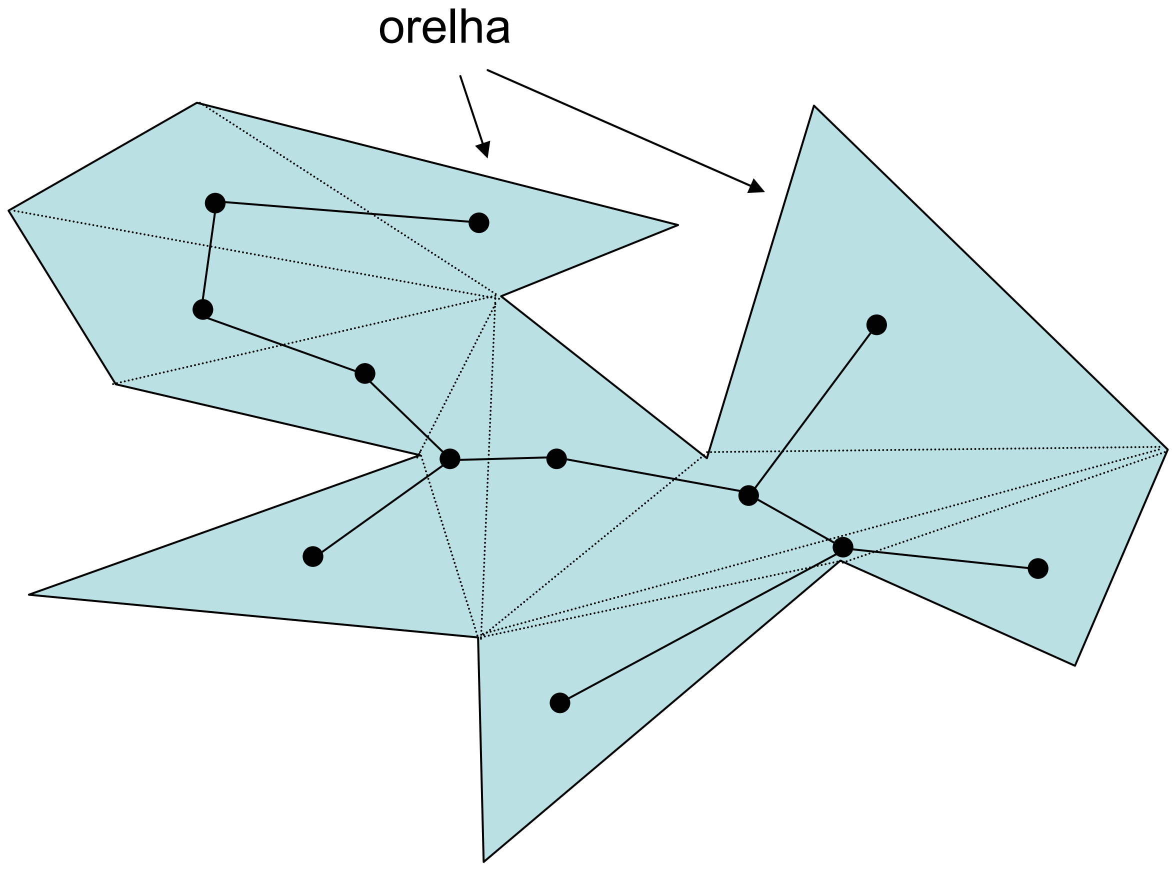
Propriedades

- Pode haver um número muito grande de triangulações diferentes de um mesmo polígono, mas <u>todas</u> têm o mesmo número de <u>diagonais</u> e <u>triângulos</u>.
- Toda triangulação de um polígono P de n vértices usam $n - 3$ diagonais e possuem $n - 2$ triângulos (prova por indução).
- A soma dos ângulos internos de um polígono com n vértices é $(n - 2)\pi$.
  - Cada triângulo contribui com π.

Dual de Uma Triangulação

- O **dual** é um grafo que associa um nó a cada triângulo e um arco entre dois nós se seus triângulos compartilham uma mesma diagonal.
- O dual é uma árvore T onde cada nó tem grau no máximo três.
  - Nós de grau 1 são as folhas de T.
  - Nós de grau 2 estão em caminhos de T.
  - Nós de grau 3 são ramificações.
  - T é uma árvore binária se a sua raiz for um nó de grau 1 ou 2.

Dual



Teorema das Duas Orelhas de Meisters

- Três vértices consecutivos a, b e c de um polígono formam uma **orelha** se ac é uma diagonal.
  - b é a ponta da orelha.
  - Duas orelhas são disjuntas se seus interiores não se intersectam.
- Todo polígono com $n \geq 4$ vértices possui pelo menos <u>duas orelhas disjuntas</u>.
  - Uma árvore com mais de um nó tem pelo menos duas folhas (a árvore dual tem n - 2 nós).

Coloração

- O grafo da triangulação de um polígono P pode ser colorido por três cores apenas.
  - Indução: um triângulo pode ser colorido. Para $n \geq 4$, P tem uma orelha Δabc, com ponta b.
  - Cria-se um novo polígono P' removendo a orelha. P' tem $n - 1$ vértices (eliminou-se b). Aplica-se a hipótese indutiva a P'.
  - Recoloca-se a orelha, colorindo b com a cor não usada em a e c.