Interseção de Semiplanos

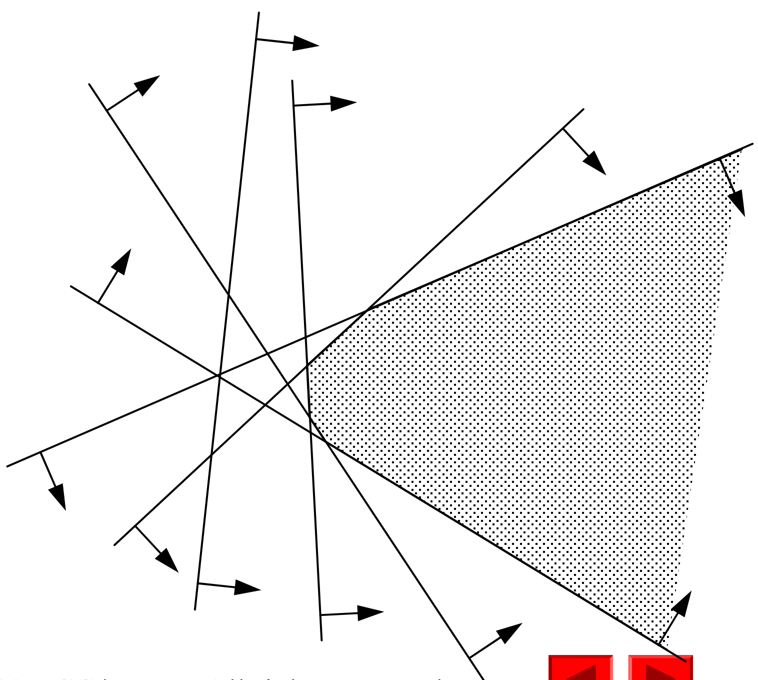
Claudio Esperança
Paulo Roma

Interseção de Semiplanos

- Problema consiste em construir a região convexa dada pela interseção de um conjunto de n semiplanos $H = \{ h_1, h_2 ..., h_n\}$ em d dimensões
  - Resultado tipicamente é um politopo convexo limitado de dimensão d
  - Pode ser também o conjunto vazio, um politopo ilimitado ou mesmo um politopo de dimensão menor que d
- Vamos nos concentrar em semiplanos (semi-espaços planos) em $\Re^2$

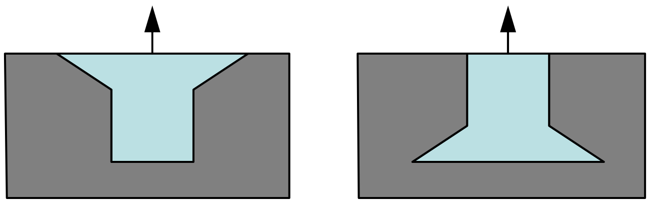
Interseção de Semiplanos

- Cada semiplano é dado por uma inequação da forma
$$ax + by \le c$$
- Semiplano complementar é dado por
$$(-a)x + (-b)y \le -c$$
- Reta de suporte é dada por
$$ax + by = c$$



Motivação

- Livro fala do problema de remoção de objetos de moldes
  - A manufatura do molde depende de se escolher uma direção de onde o objeto possa ser depois retirado sem danificar o molde



  - Pode ser reduzido ao problema de interseção de semiplanos
- Em computação gráfica, objetos convexos são comumente expressos sob a forma de interseção de semiplanos
  - Usados como aproximações de objetos complexos
  - Aplicação: Detecção de colisões

Complexidade

- Complexidade do resultado: $O(n)$
  - Cada semiplano pode figurar como lado do resultado
- Problema é redutível ao problema do fecho convexo: $\Omega(n \log n)$

Algoritmo Dividir para Conquistar

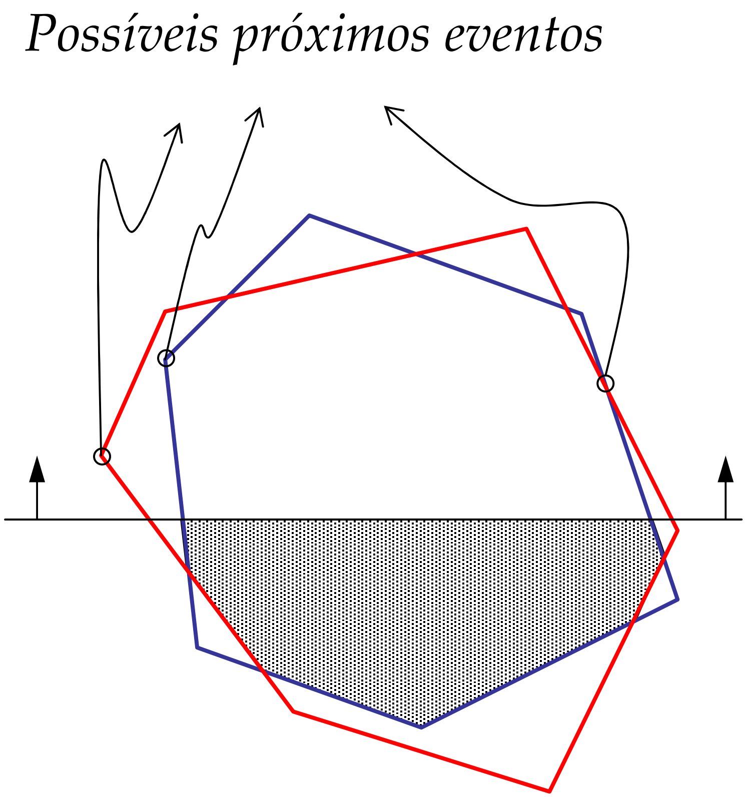
- Se $n = 1$, retornar h_1
- Dividir H em 2 subconjuntos H_1 e H_2, com $\lceil n/2 \rceil$ e $\lfloor n/2 \rfloor$ semiplanos, respectivamente
- Computar recursivamente C_1 e C_2, como a interseção dos semiplanos em H_1 e em H_2, respectivamente.
- Combinar o resultado computando a interseção dos polígonos C_1 e C_2

Interseção de 2 polígonos convexos

- Polígonos podem ser ilimitados
  - Estruturas de dados apropriadas
  - Ex.: representar polígono por uma lista dos semiplanos que fazem parte da fronteira
    - Usar um "flag" para denotar polígonos ilimitados
- Conhecemos um algoritmo de varredura para computar a interseção de n segmentos de reta em tempo $O\,((n + I) \log n)$
  - 2 polígonos convexos de n lados não podem se intersectar em mais do que $2n$ pontos
    - Uma reta intersecta um polígono convexo em 2 pontos no máximo
  - Complexidade do algoritmo: $O\,(n \log n)$

Interseção de 2 polígonos convexos

- Neste caso, entretanto, um algoritmo de varredura simples pode fazer o serviço em $O(n)$
  - Como os polígonos são dados como listas, ordenação pode ser feita em $O(n)$
  - reta de varredura intersecta cada polígono em 2 pontos no máximo
  - Estado da reta de varredura tem complexidade constante
    - Cada evento pode ser processado em $O(1)$



Complexidade do Algoritmo

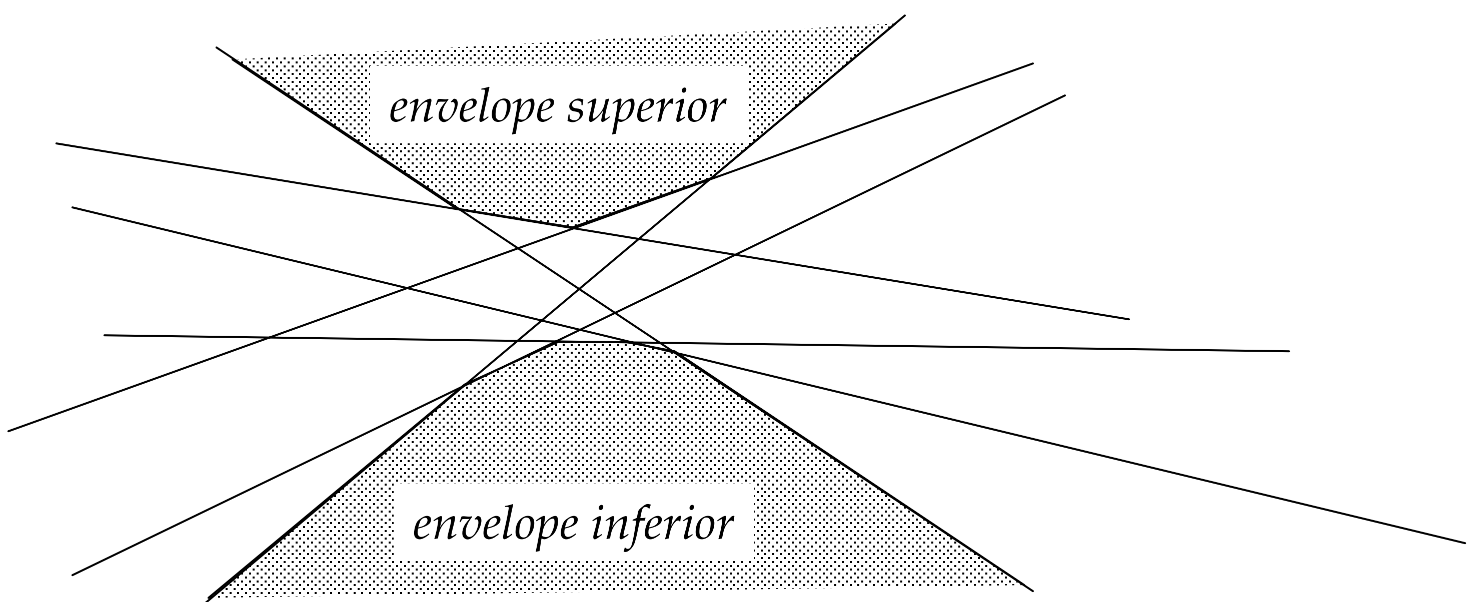
- Algoritmo para computar a interseção de 2 polígonos convexos é O(n)
- Algoritmo dividir para conquistar tem complexidade dada pela fórmula de recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 2T(n/2) + n & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

  - Idêntica à fórmula de recorrência do *MergeSort*
  - Solução: $T(n) \in O\,(n \log n)$

Envelopes superior e inferior

- Variante do problema de interseção de semiplanos
- É dado um conjunto de n retas $L=\{\ell_1, \ell_2, \ldots \ell_n\}$ não verticais
  - Cada reta ℓ_i dada na forma $y = a_i\, x + b_i$
  - Semiplano inferior associado: $y \leq a_i\, x + b_i$
  - Envelope inferior é a interseção desses semiplanos



Envelopes superior e inferior

- Problema de interseção de semiplanos pode ser reduzido ao de computar os envelopes inferior e superior
  - Dividir semiplanos h_i de H em 2 classes
    - Se forma é $y \leq a_i x + b_i$ então semiplano inferior
    - Se forma é $y \geq a_i x + b_i$ então semiplano superior
  - Computar os envelopes
  - Achar a interseção dos 2 polígonos convexos
- Envelopes têm também relação com problema do fecho convexo
  - Achar envelope inferior de um conjunto de retas $L=\{\ell_1, \ell_2, \ldots \ell_n\}$ é equivalente a achar a parte superior do fecho convexo do conjunto de pontos $P=\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ onde p_i é o <u>dual</u> de ℓ_i

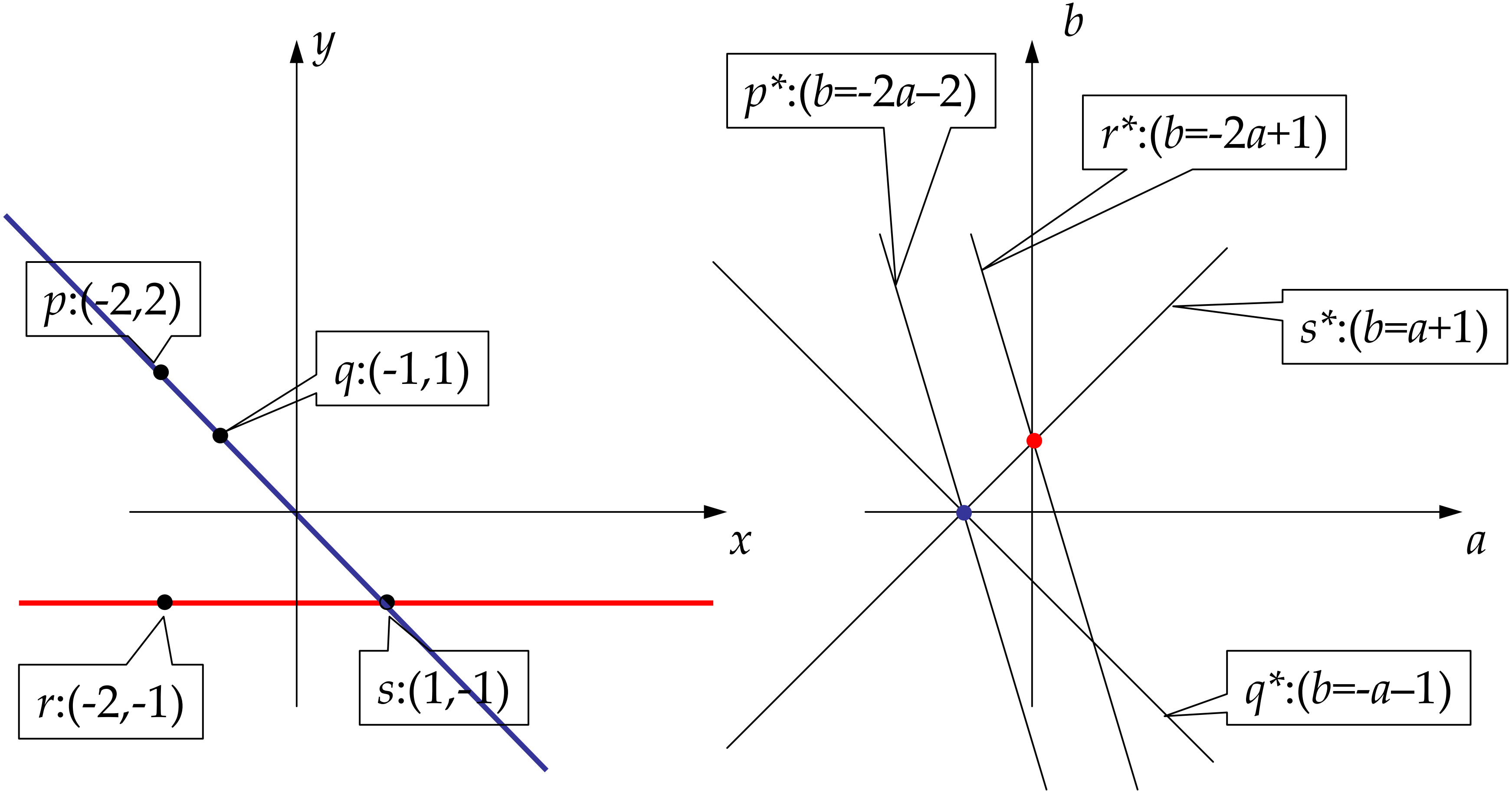
Dualidade (transformada de Hough)

- Seja uma reta na forma $y = ax - b$
  - Uma reta qualquer (não vertical) pode ser representada por um par de coeficientes (a,b)
  - Podemos pensar em (a,b) como coordenadas de <u>um ponto</u> no *plano dual*
    - (Diz-se que <u>a reta</u> está no *plano primal*)
  - Uma <u>reta no plano dual</u> pode ser escrita na forma $b = xa - y$ e portanto pode ser representada por dois coeficientes (x,y)
    - Corresponde a um <u>ponto no plano primal</u>
- A transformada de Hough, que vamos denotar pelo sufixo (*), leva pontos e retas do plano primal em retas e pontos do plano dual
  - $\ell^* = (a,b)$
  - $p^* : \; (b = p_x a - p_y)$

Propriedades da relação de dualidade

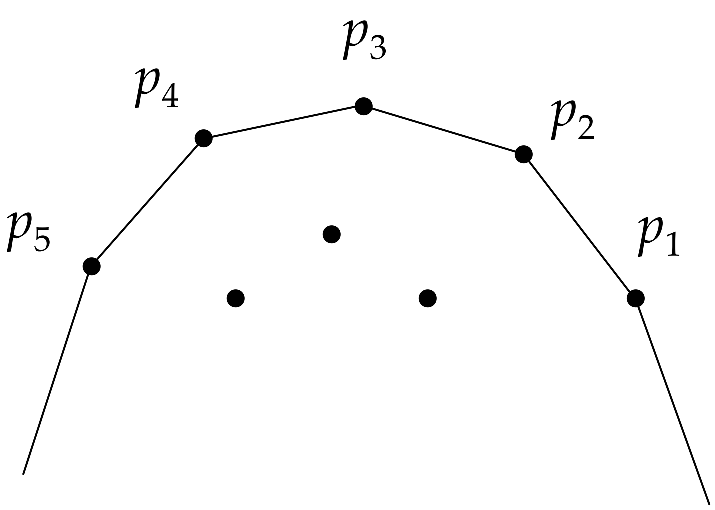
- **Auto-inversa**: $(p^*)^* = p$
- **Reversão de ordem:** ponto p está acima / sobre / abaixo da reta ℓ se e somente se o ponto ℓ^* está abaixo / sobre / acima da reta p^*
- **Preservação de interseções**: retas ℓ_1 e ℓ_2 se intersectam no ponto p se e somente se a reta p^* passa pelos pontos ℓ_1^* e ℓ_2^*
- **Colinearidade e coincidência:** três pontos são colineares se e somente se seus duais se intersectam num ponto comum

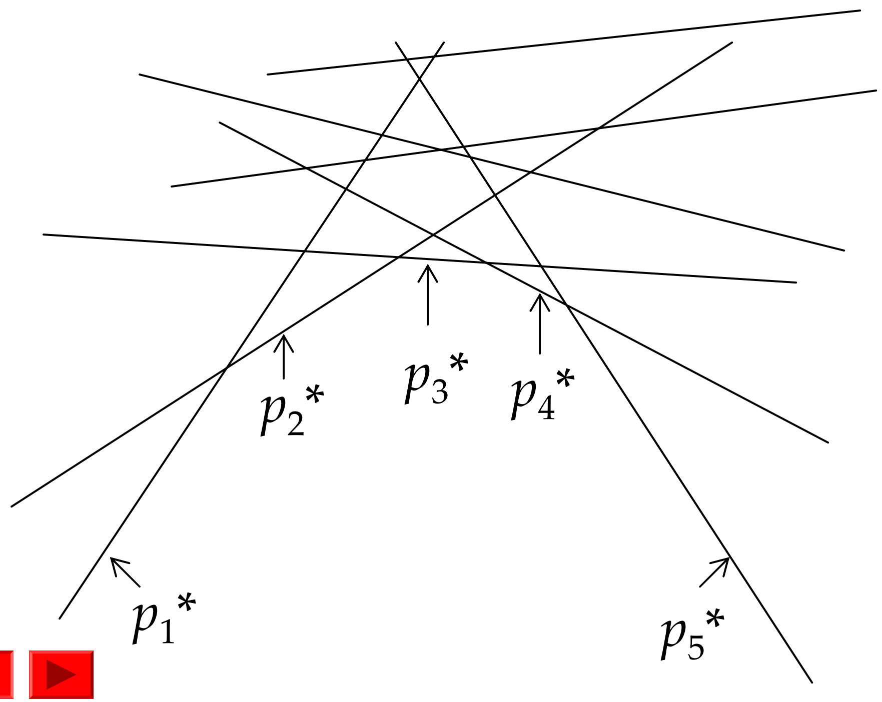
Propriedades da relação de dualidade



Fecho convexo superior e envelope inferior

- **Lema:** Seja P um conjunto de pontos e P^* o conjunto de retas dual de P. A ordem anti-horária entre os vértices do fecho convexo superior de P é igual à ordem da esquerda para a direita do envelope inferior de P^*





Fecho convexo superior e envelope inferior

- **Prova:** (Assume-se que não há 3 pontos colineares)
  - $p_i p_j$ é aresta do fecho superior sse a reta ℓ_{ij} que passa por ambos os pontos tem todos os demais pontos de P abaixo de si
  - As retas duais p_i^* e p_j^* são adjacentes no envelope inferior sse o ponto de interseção ℓ_{ij}^* está abaixo de todos as demais retas do plano dual P^*
  - A propriedade de reversão de ordem assegura que a condição primal acontece sse a condição dual acontece logo a seqüência entre pontos primais e retas duais é idêntica
  - Observe a ordem anti-horária dos pontos no primal corresponde a valores decrescentes de x , enquanto que as retas duais apresentam inclinações a decrescentes