Geometria Computacional
Primitivas Geométricas

Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Operações com Vetores

- Sejam x e y vetores do R^n e λ um escalar.
  - somavetorial (x, y) = $x + y$
  - multescalar (λ, x) = $\lambda\, x$
  - prodescalar (x, y) = $x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$
  - norma (x) = $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2}$
  - distância (x, y) = norma ($x - y$)
  - ângulo (x, y) = $\arccos\left(\frac{x.y}{|x||y|}\right)$

Ângulos Orientados no Plano

- A função ângulo anterior usa uma função simétrica em x e y, e não consegue distinguir a orientação relativa entre x e y.
- **Ordenação polar**: dados vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do R^2, ordená-los angularmente no sentido anti-horário.
  - Normalmente usa-se o eixo horizontal como referência: $u = (1,0)$.
  - A função **ângulo orientado** toma valores entre $(-\pi, \pi]$.

$$\hat{a}ngulo\,(x) = \begin{cases} \hat{a}ngulo\,(u,x),\, se\ x_2 \geq 0 \\ -\hat{a}ngulo\,(u,x),\, se\ x_2 < 0 \end{cases}$$

Ordenação Polar

- Com a primitiva ângulo orientado, o problema da orientação polar é resolvido ordenando-se o conjunto de valores ângulos (v_i), por exemplo, pelo MergeSort (algoritmo O(n log n)).
  - A função *arc cos* não é algébrica e é avaliada numericamente.
  - Só necessitamos comparar ângulos, muitas vezes.

Pseudo-ângulos

- Pode-se utilizar uma função monótona do ângulo entre dois vetores.

  $f(\theta) = 1 - \cos\theta$, se $(0 \leq \theta \leq \pi)$ e

  $f(\theta) = 3 + \cos\theta$, se $(\pi < \theta < 2\pi)$.

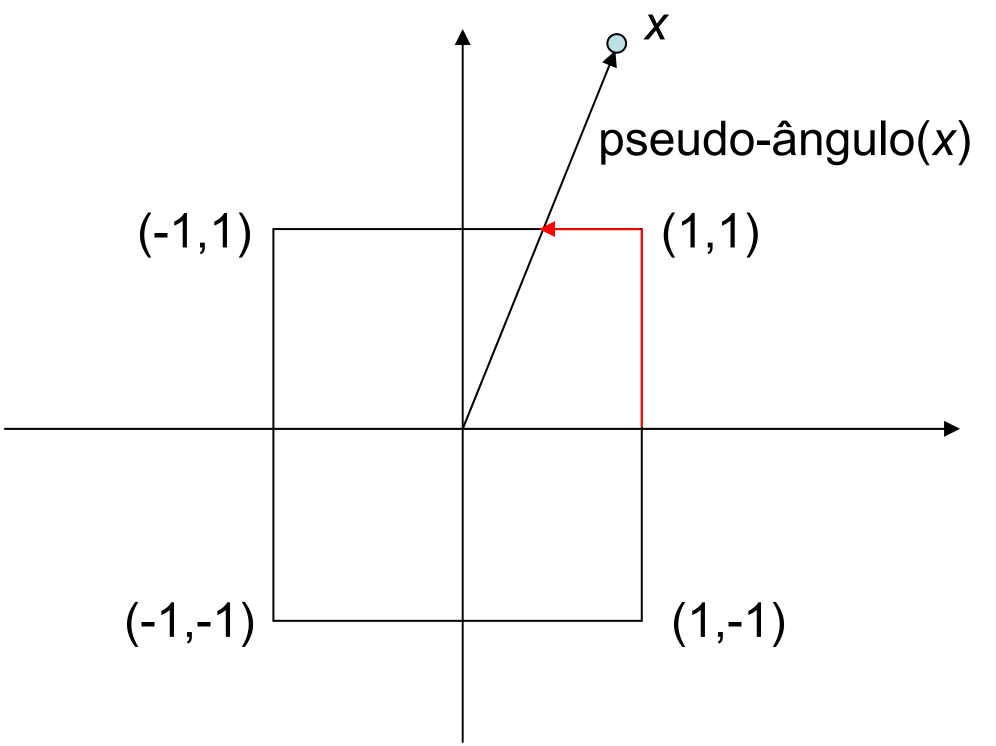
- Função pseudo-ângulo envolve apenas operações aritméticas:
  - pseudo-ângulo (x, y) = $1 - \left(\frac{x.y}{|x||y|}\right)$
  - f toma valores entre [0,4).

Outros pseudo-ângulos.

- O ângulo orientado de x é igual ao comprimento do arco orientado correspondente, tomado sobre o círculo unitário centrado na origem.
- Pode-se substituir o círculo unitário por qualquer outra curva contínua em que cada semi-reta partindo da origem a corta em um único ponto.
  - Deve ser o gráfico de um função em coordenadas polares.

Quadrado Unitário

- f definida no quadrado unitário toma valores no intervalo (-4,4].
- Pode ser implementada com 3 comparações, 1 soma e 1 divisão.

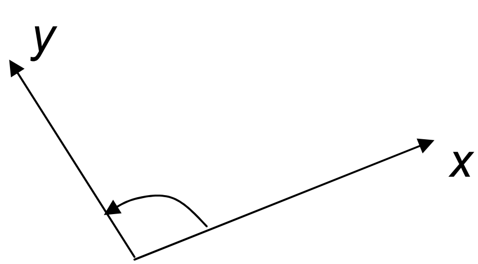


Produto Vetorial

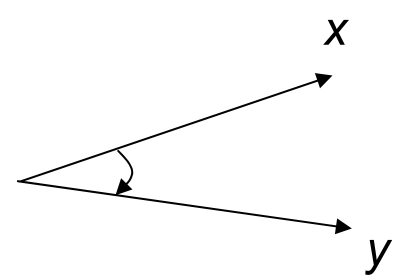
- Orientação relativa de vetores no R^2 e R^3 pode ser feita com o **produto vetorial**.
  - Prodvetorial $(x,y) = x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$
  - O produto vetorial de dois vetores não colineares x e y do R^3 é um vetor simultaneamente ortogonal a x e y.
  - A orientação determinada por x, y e $x \times y$ é a mesma do triedro definido pelos eixos x, y e z (regra da mão direita).
  - Para o R^2, o produto vetorial age sobre dois vetores com coordenada 3 nula. Logo, o resultado tem as componentes 1 e 2 nulas e a 3 não nula.

Sinal

- O sinal do produto vetorial denota se o ângulo de x para y é positivo ou negativo, ou se x está à esquerda ou à direita de y.



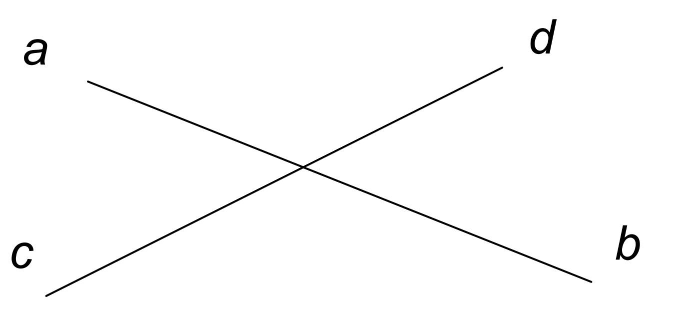
$x \times y > 0$: y à esquerda de x.



$x \times y < 0$: y à direita de x.

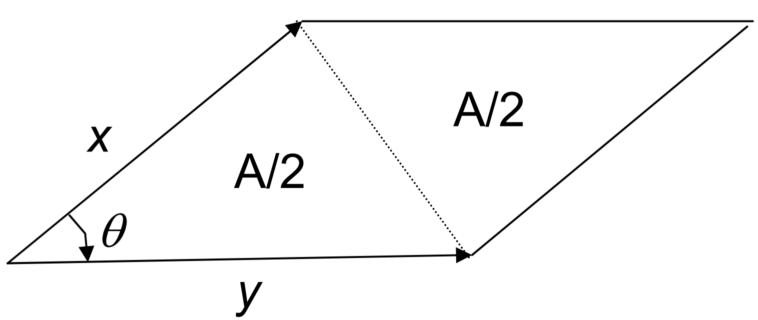
Interseção

- Dados dois segmentos abertos ab e cd do plano, determinar se eles se interceptam.
- Os segmentos se interceptam se c e d estão em lados <u>opostos</u> em relação a a e b, e a e b estão em lados opostos em relação a c e d.
  – $(ab \times ac)\ (ab \times ad\ ) < 0$ e $(cd \times ca)\ (cd \times cb) < 0$.



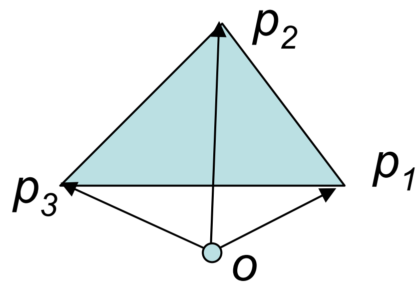
Áreas Orientadas

- O valor absoluto do produto vetorial está relacionado com a área do paralelogramo formado por x e y.
  - $|x \times y| = |x|\,|y| \sin \theta$.
  - $x \times y$ é igual a área do paralelogramo formado por x e y ou <u>duas vezes</u> a área do triângulo definido por eles.



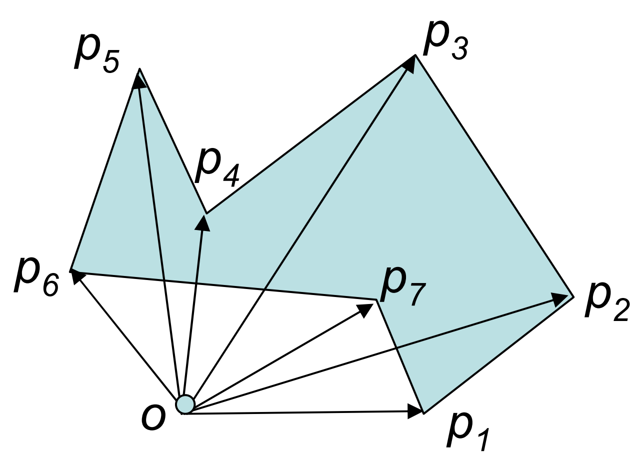
Área de um Triângulo

- Sejam p_1, p_2, p_3 e o, pontos do R^2 ou R^3.
  - A expressão $S = ½ (op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + op_3 \times op_1)$ no R^3 é um vetor <u>normal</u> ao plano definido por p_1, p_2 e p_3 e de <u>norma</u> igual à <u>área</u> do triângulo $p_1p_2p_3$.
  - No R^2, S é a área orientada de $p_1p_2p_3$.
    - $|S|$ é a área de $p_1p_2p_3$ e S é positivo se somente se p_1, p_2 e p_3 estão no sentido anti-horário.



Área de um Polígono

- Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e o, pontos do R^2 ou R^3.
  - A expressão $S = ½ (op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + \ldots + op_n \times op_1)$ no R^3 é um vetor <u>normal</u> ao plano definido por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e de <u>norma</u> igual à <u>área</u> do polígono $p_1p_2\ldots p_n$.
  - No R^2, S é a área orientada de $p_1p_2\ldots p_n$.
    - $|S|$ é a área de $p_1p_2\ldots p_n$ e S é positivo se somente se $p_1\ p_2 \ldots p_n$ estão orientados no sentido anti-horário.

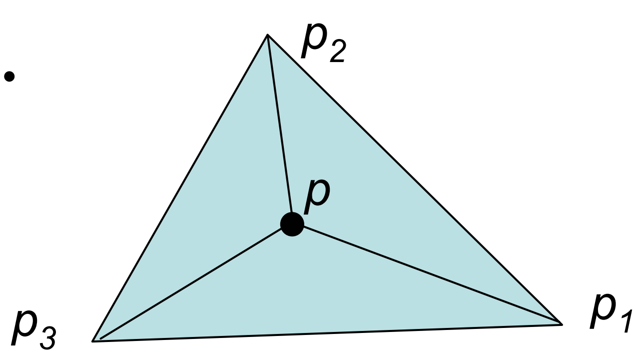


Coordenadas Baricêntricas

- Sejam p_1, p_2, p_3 pontos <u>não colineares</u> do R^2. Então cada ponto p do plano pode ser escrito de <u>modo único</u> na forma:

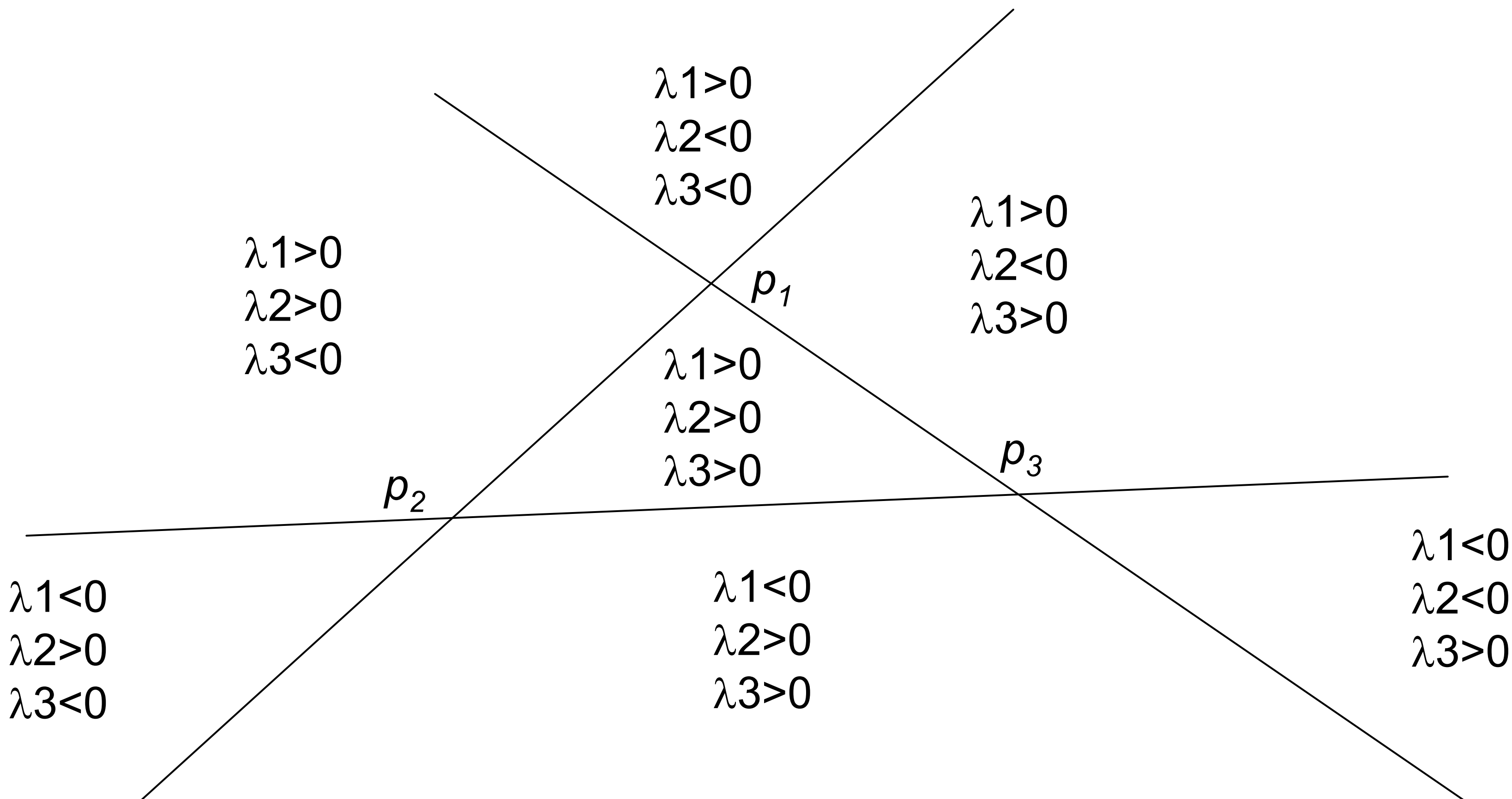
  $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$, onde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

- λ_i são chamados de **coordenadas baricêntricas** de p em relação a p_1, p_2, p_3.



Sinal

$$\lambda_1 = \frac{S_{pp_2p_3}}{S_{p_1p_2p_3}},\ \lambda_2 = \frac{S_{p_1pp_3}}{S_{p_1p_2p_3}},\ \lambda_3 = \frac{S_{p_1p_2p}}{S_{p_1p_2p_3}}$$



Interpretação

- Coordenadas baricêntricas de um ponto podem ser interpretadas como imagem da transformação afim: $T : R^2 \rightarrow R^3$ tal que

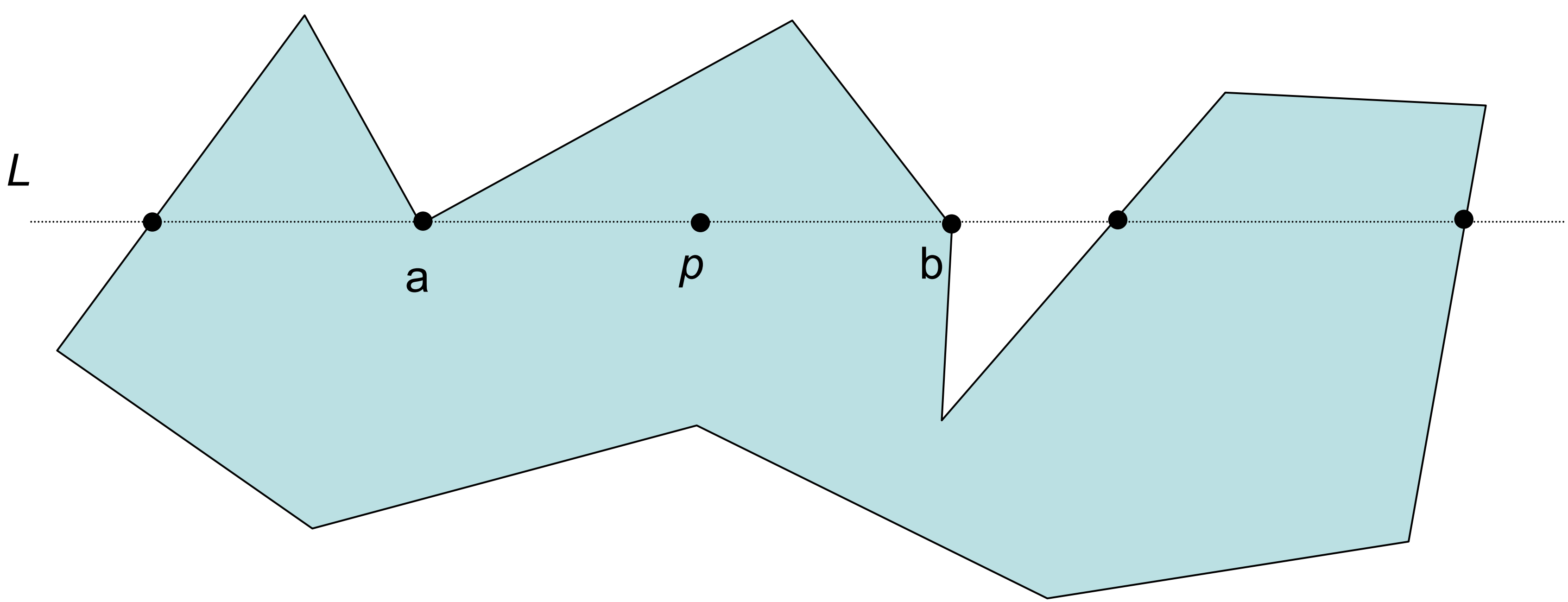
  $T(p_1)=(1,0,0)$,

  $T(p_2)=(0,1,0)$ e

  $T(p_3)=(0,0,1)$.
- Esta transformação é injetiva e leva o R^2 no plano $x + y + z = 1$.

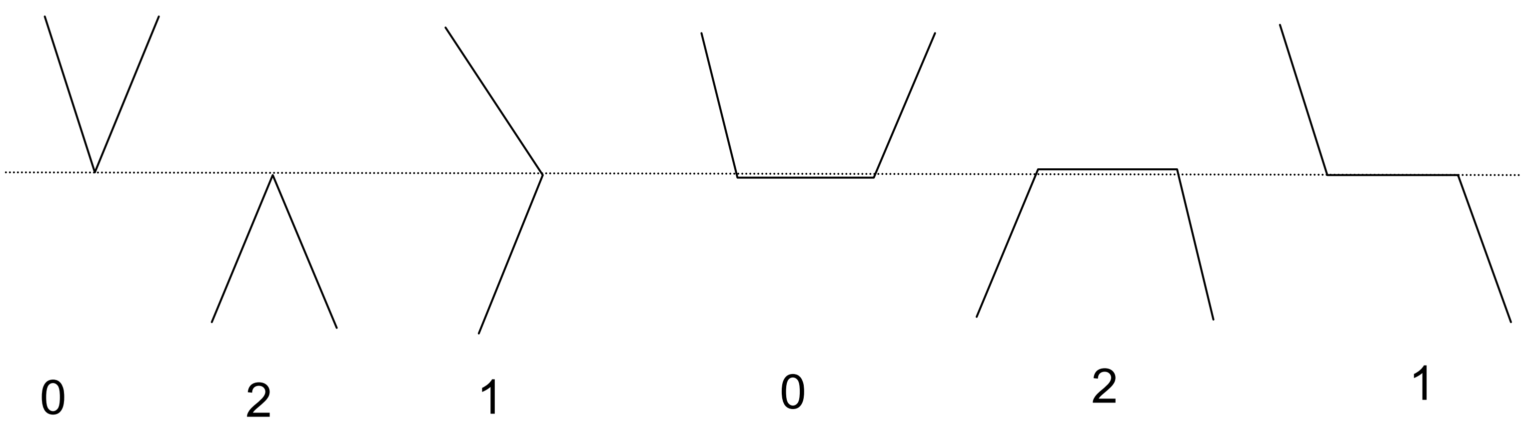
Localização de Pontos em Polígonos

- Determina-se o <u>número de interseções</u> de uma semi-reta L arbitrária, partindo de p, com a fronteira do polígono: ímpar $\rightarrow$ dentro, par $\rightarrow$ fora.



Casos Especiais

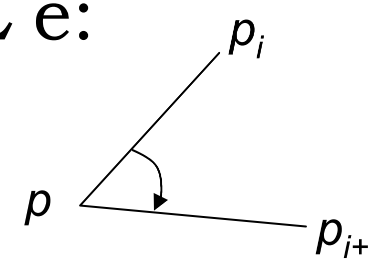
- Cruzamentos e número correto de interseções.
  - Contam-se interseções apenas se não ocorrerem em coordenadas <u>mínimas</u> de arestas.



Índice de Rotação

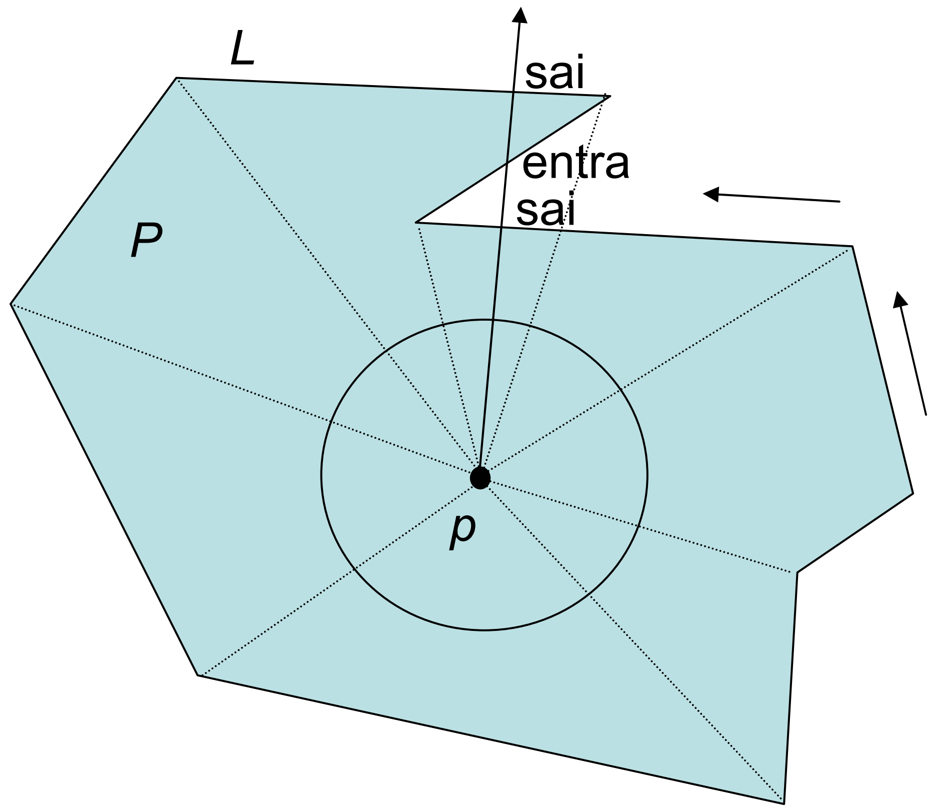
- Dada uma linha poligonal fechada $L = p_1 p_2 \ldots p_n$ (não necessariamente simples) e um ponto p não pertencente a ela, o **índice de rotação** de p em relação a L é:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \prec (p_i p p_{i+1})$$



- Cada ângulo orientado é igual ao comprimento do arco orientado obtido pela projeção de dois vértices consecutivos sobre um círculo de raio 1 centrado em p.
  - A soma de todos os ângulos corresponde a um número inteiro de voltas no círculo.

Cálculo do Índice de Rotação



Ponto em Polígono

- Seja P um polígono simples, e p um ponto não pertence a fronteira de P.
- Considere-se a interseção de semi-retas com origem em p e passando por vértices de P de modo a dividir o círculo em setores.
  - Setores do círculo com sentido positivo correspondem a arestas de saída, e os negativos a arestas de entrada.
  - p é interior se somente se $k = \pm 1$, pois há uma saída a mais do que entradas nesse caso. Logo a contribuição de cada setor é o seu comprimento.
  - p é exterior se somente se $k = 0$, pois o número de entradas é igual ao número de saídas. Logo a contribuição de cada setor é zero.

Análise

- Podem ser utilizados pseudo-ângulos.
- Este método é altamente <u>instável</u> se *p* estiver próximo da fronteira de *P*, devido a descontinuidade do índice de rotação.
- Generaliza para o caso de poliedros no R^3 (usa-se uma esfera unitária centrada em *p*, e ângulos sólidos).