

# Computação de Superfícies Mínimas Discretas

JOÃO PAULO BENTO  
PAULO ROMA CAVALCANTI

LCG - Laboratório de Computação Gráfica, COPPE - Sistemas / UFRJ  
21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Caixa Postal 68511  
{jpbento,roma}@lcg.ufrj.br  
roma@wattson.ibm.com

**Abstract.** There is a number of methods to compute minimal surfaces. This paper presents a computer program that solves Plateau's problem, joining a recent interactive method of Pinkall and Polthier with numerical and computer graphic methods ensuring more efficiency and robustness. The system will be able to generate a discrete minimal surface from a fixed boundary (a set of closed polygonal curves).

**Keywords:** Minimal Surfaces, Plateau's Problem, Topological Changes.

## 1 Introdução

As superfícies mínimas têm sido objeto de grande interesse nos dois últimos séculos. Elas são superfícies de área mínima, restritas a determinadas condições. Um exemplo clássico é o da película de sabão que possui a menor área possível sujeita à borda que a mantém. Daí surgiu o famoso problema de Plateau, que questionava a existência de uma superfície mínima homeomorfa ao disco com fronteira em uma dada curva fechada  $\Gamma$  do  $\mathbb{R}^n$ . A resposta positiva, baseada em estudos experimentais realizados no século XIX pelo físico belga Plateau (1873), só foi conseguida teoricamente depois de 1930, por Douglas (1931) e Radó (1930), que tiveram a idéia de minimizar a integral de Dirichlet - em posterior reformulação por Courant (1950) - ao invés da própria integral de área.

As superfícies mínimas se apresentam em muitas micro e macro estruturas orgânicas e minerais. Uma boa exposição sobre a importância que elas possuem pode ser vista em Almgren (1982). A utilização, por exemplo, de estruturas com superfícies de área mínima para obras de arquitetura, representa a economia máxima de material, maior resistência, além de rigidez geométrica natural.

Do ponto de vista numérico, existem vários métodos para calcular superfícies mínimas [Wilson (1961), Concus (1967), Dziuk (1991)], incluindo superfícies que minimizam outras formas de energia, além da tensão superficial [Brakke (1992)]. Um método recente para o problema de Plateau foi proposto por Pinkall e Polthier (1993).

O objetivo deste trabalho é apresentar um sistema para a solução do problema de Plateau, que combina o algoritmo de Pinkall e Polthier [1993], com métodos

numéricos e técnicas de computação gráfica, para garantir maior eficiência e robustez. O sistema gera uma superfície mínima discreta, restrita a uma dada fronteira (formada por curvas poligonais fechadas).

Tal resultado é possível, aplicando sucessivamente o algoritmo de minimização [Pinkall & Polthier 1993] em uma superfície (triangulada) com bordo. Este algoritmo, baseado na resolução de um sistema linear, altera a geometria da superfície, reduzindo sua área, e considera alcançada a solução quando a variação da área superficial se tornar suficientemente pequena.

A principal contribuição deste trabalho é garantir a convergência de um eficiente método iterativo para a resolução do sistema linear associado ao algoritmo de minimização, incluindo, para isso, procedimentos topológicos que permitem eliminar degenerações e alterar a topologia global da superfície triangulada, durante o processo de minimização.

## 2 Método de Minimização

Seja  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a parametrização de uma superfície  $S = f(\Omega)$ . A área  $A(f(\Omega))$  de  $S$  e a energia de Dirichlet  $E_D(f)$  de  $f$ , são dadas por:

$$A(f) = \int_{\Omega} \det(\nabla f) \quad \text{e} \quad E_D(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla f|^2,$$

onde  $\nabla f$  representa a matriz Jacobiana de  $f$ .

Além disso,  $A(f(\Omega)) \leq E_D(f)$ , valendo a igualdade se e somente se  $f$  é conforme (isto é, preserva os ângulos).

Seja  $\Gamma$  uma curva compacta sem bordo do  $\mathbb{R}^3$ . Considerando  $S_i, S_{i+1} \subset \mathbb{R}^3$  superfícies com fronteira  $\Gamma$ , tais que a energia de Dirichlet de  $f_M: S_i \rightarrow S_{i+1}$  é mínima no espaço de funções que levam  $S_i$  em qualquer outra

superfície, então  $A(S_{i+1}) \leq A(S_i)$ . De fato, se  $E_D(f_M)$  é mínima, então:

$$A(S_{i+1}) \leq E_D(f_M) \leq E_D(f_i: S_i \rightarrow S_i) = A(f_i(S_i)) = A(S_i).$$

Aplicando recursivamente um procedimento básico que, partindo de  $S_i$ , seja capaz de calcular  $S_{i+1}$  nas condições acima, é possível convergir para uma superfície mínima restrita à fronteira  $\Gamma$ , desde que conhecida alguma superfície inicial  $S_0$  com fronteira  $\Gamma$ .

### 2.1 Problema Básico

Seja  $\Gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$  um conjunto de contornos poligonais fechados e  $T$  uma superfície triangulada com fronteira  $\partial T = \Gamma$ . Deseja-se estender uma função  $f: \partial T \rightarrow \Gamma$  para os vértices interiores de  $T$ , obtendo-se uma nova triangulação  $T' = f(T)$ , tal que  $f: T \rightarrow T'$  minimize a energia de Dirichlet no espaço de funções lineares por partes com domínio em  $T$ .

Dados dois triângulos  $t_i$  e  $t_i'$ , é possível definir uma função linear  $f_i: t_i \rightarrow t_i'$  (Figura 1). A energia de Dirichlet dessa transformação pode ser obtida em termos dos ângulos do domínio  $t_i$  e dos comprimentos das arestas da imagem  $t_i'$ , na forma [Pinkall e Polthier (1993)]:

$$E_D(f_i) = \frac{1}{4} \left( \cot(\alpha) |a|^2 + \cot(\beta) |b|^2 + \cot(\gamma) |c|^2 \right).$$

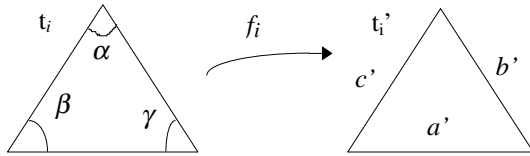


Figura 1 - Energia de Dirichlet  $E_D(f_i)$  de uma função linear  $f_i$  entre dois triângulos  $t_i$  e  $t_i'$ .

Estendendo este resultado para duas triangulações  $T$  e  $T'$ , a energia de Dirichlet de uma função linear por partes  $f: T \rightarrow T'$  definida em cada triângulo  $t_i \in T$  por uma função linear  $f_i: t_i \rightarrow t_i' \in T'$ , é a soma ponderada de todos os comprimentos das arestas  $a_i'$  da imagem  $T'$ , cujos pesos são os ângulos opostos correspondentes  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  no domínio  $T$ , ou seja:

$$E_D(f) = \sum_{\text{triangulo } i} E_D(f_i) = \frac{1}{4} \sum_{\text{arestas } i} (\cot(\alpha_i) + \cot(\beta_i)) |a_i'|^2$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\substack{\text{pares } (i,j) \\ \text{de vértices} \\ \text{adjacentes}}} (\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})) |p_i' - p_j'|^2,$$

onde  $p_i'$  são os vértices da triangulação  $T'$  e  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  os ângulos em  $T$  correspondentes às arestas  $p_i'p_j'$ .

Minimizar o funcional  $E_D(f)$  assim expresso, ou seja, obter os pontos  $p_i'$  tal que  $E_D(f)$  seja mínimo, envolve cálculos simples e recai na solução de um sistema linear.

### 2.2 Procedimento Básico

Dada uma triangulação com  $B+I$  vértices, representada por  $T_k = (p_1, \dots, p_B, p_{B+1}, \dots, p_{B+I})$ , onde  $p_i$  são vértices na borda, para  $1 \leq i \leq B$ , e vértices interiores para  $B < i \leq B+I$ . Os vértices interiores  $x_i$  ( $B < i \leq B+I$ ) da nova triangulação  $T_{k+1} = (p_1, \dots, p_B, x_{B+1}, \dots, x_{B+I})$  tal que  $E_D(f: T_k \rightarrow T_{k+1})$  seja mínima, podem ser obtidos resolvendo as equações lineares  $Q_i = 0$  ( $B < i \leq B+I$ ), tal que [Pinkall e Polthier (1993)]:

$$Q_i = 2 \left( \sum_{j=1}^B S_{ij} p_j + \sum_{j=B+1}^{B+I} S_{ij} x_j \right) \text{ e}$$

$$S_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{8} (\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})) \cdot Id; & p_i, p_j \text{ adjacentes} \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{ii} = \sum_{p_j \text{ adjacente a } p_i} -S_{ij}$$

onde  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  são os dois ângulos opostos às arestas  $p_i p_j$ ,  $Id$  a matriz identidade  $3 \times 3$  e  $S$  uma matriz simétrica e positiva definida, se os triângulos tiverem área positiva.

O algoritmo iterativo de minimização executa os passos a seguir: dada uma triangulação inicial  $T_0$  com pontos de fronteira definidos, aplicar recursivamente o procedimento básico acima, até que  $|\text{Área}(T_k) - \text{Área}(T_{k+1})| \leq \epsilon$ .

### 3 Resolução do Sistema Linear

Cada iteração do algoritmo de minimização requer a solução do sistema linear (para cada coordenada):  $S^{\text{II}} x = -S^{\text{BI}} p$ , onde  $x$  e  $p$  são vértices interiores e de borda da nova triangulação  $T_{k+1}$ , respectivamente, e  $S^{\text{II}}$  e  $S^{\text{BI}}$  são sub-matrizes da matriz  $S$  que está associada à triangulação  $T_k$  com  $I$  vértices interiores e  $B$  vértices de fronteira. (Figura 2)

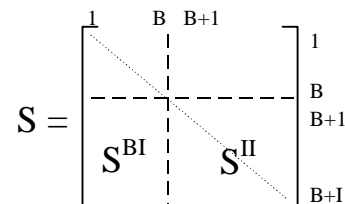


Figura 2 - Sub-matrizes  $S^{\text{BI}}$  e  $S^{\text{II}}$  da matriz  $S$  associada a uma triangulação  $T_k$  com  $I+B$  vértices.

O alto grau de esparsidade e a simetria da matriz  $S$  permitem armazenar  $S^{BI}$  e  $S^{II}$  com baixo custo de memória, na ordem de  $GI$  e  $GI/2$ , respectivamente, sendo  $G$  o maior grau dos vértices da triangulação.

A estratégia proposta neste trabalho para a resolução do sistema linear  $S^{II}x = b$  ( $b = -S^{BI}p$ ), com  $S^{II}$  esparsa e definida positiva, utiliza o eficiente método iterativo do gradiente conjugado para calcular o mínimo de uma função  $g(x)$ , tal que  $\nabla g(x) = 0 \Leftrightarrow S^{II}x = b$  [Press et al. (1990)], ou seja:

$$g(x) = \frac{1}{2} x \cdot S^{II} \cdot x - b \cdot x, \quad \text{onde} \quad \nabla g(x) = S^{II} \cdot x - b.$$

Sabe-se que o método do gradiente conjugado converge para o mínimo de  $g(x)$  em um número de iterações igual, no máximo, à dimensão do seu domínio, isto é,  $I$ . Sua eficiência na resolução do sistema linear se baseia no fato de que o número de iterações é geralmente muito pequeno e o cálculo de  $g(x)$  e  $\nabla g(x)$  em cada iteração tem custo  $O(GI)$  associado ao produto de  $S^{II}$  com um vetor  $x$ .

Este método, entretanto, pode não ser capaz de convergir para a solução de sistemas lineares associados a determinadas triangulações (possuindo triângulos degenerados) no algoritmo de minimização.

#### 4 Mudanças Topológicas

Uma questão fundamental é o surgimento de degenerações em uma triangulação sujeita ao processo de minimização. Embora, do ponto de vista teórico, triângulos degenerados não representem perigo algum, na prática podem causar problemas numéricos e levar o algoritmo de minimização a deixar de minimizar. Além disso, o método do gradiente conjugado utilizado neste trabalho se mostra bastante sensível à degeneração, deixando de convergir para a solução do sistema linear. Por outro lado, a eliminação de triângulos degenerados permite a alteração da topologia global da superfície por meio de testes geométricos absolutamente locais.

##### 4.1 Mudanças Topológicas Locais

As três regras para a eliminação de degenerações descritas na Figura 3 e já propostas (em caráter experimental) por Pinkall e Polthier (1993) buscam manter a geometria da triangulação.

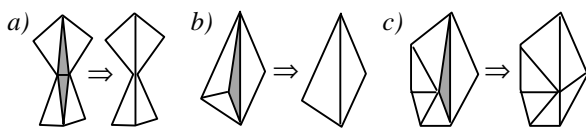


Figura 3 - Regras para eliminação de triângulos degenerados.

Em 3.a), um (e apenas um) dos ângulos de um triângulo é muito pequeno e a remoção dos dois triângulos (hachurados), adjacentes pela aresta oposta ao ângulo, é intuitiva. Quando um ângulo se aproxima de  $\pi$ , o procedimento ideal é o ilustrado em 3.b), já que um vértice se aproxima da aresta oposta e os três triângulos a remover são praticamente coplanares. Esse raciocínio não vale, entretanto, se o vértice em questão pertencer a mais de três triângulos como em 3.c). A solução adotada neste caso, ao contrário das primeiras que removem efetivamente triângulos, apenas troca (do ponto de vista topológico) a diagonal do quadrilátero formado pelos triângulos que compartilham a aresta oposta ao ângulo degenerado. Observe que as alterações topológicas são acompanhadas de atualizações nas coordenadas de certos vértices, como mostra a Figura 3.

Neste trabalho, a aplicação de um procedimento baseado na terceira regra acima descrita, mostrou ser inadequada para eliminar certos tipos de degeneração, como o da Figura 4a, onde o procedimento cicla indefinidamente. Entretanto, é fácil observar que esse fato poderia ser evitado, resolvendo primeiro a degeneração no triângulo 2 (Figura 4.b).

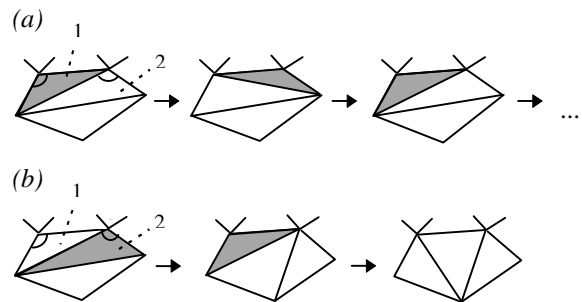


Figura 4 - Caso especial na aplicação da regra 3 para remoção de degenerações: a) começando pelo triângulo 1: o procedimento não termina.; b) começando pelo triângulo 2: remoção de degenerações com sucesso.

Portanto, o controle na ordem de tratamento dos triângulos degenerados pode ser decisivo para a obtenção de bons resultados. Essa nova proposta foi utilizada neste trabalho e se revelou satisfatória para a eliminação completa de degenerações.

##### 4.2 Mudanças Topológicas Globais

As mudanças topológicas globais são consequência direta e fazem parte do processo de remoção de triângulos degenerados. Portanto, não são necessários testes geométricos adicionais. Na verdade, elas são a solução natural para alguns casos especiais de remoção de triângulos.

A Figura 5 mostra a representação tri-dimensional de um exemplo em que a aplicação da primeira regra para eliminação de degenerações exige a alteração da topologia global do modelo. A detecção destes casos especiais é bastante simples, já que se caracterizam pela existência de dois vértices, ligados por duas arestas distintas. No caso da figura, a aresta duplicada é a compartilhada pelos triângulos hachurados. A separação da superfície em duas componentes conexas é teoricamente correta, já que ambas não poderiam se manter unidas por uma tensão superficial pontual (para pontos fora da borda). Tal restrição é, portanto, intrínseca ao problema das superfícies mínimas, embora esteja também relacionada com a estrutura de dados para sólidos *manifold*, utilizada neste trabalho.

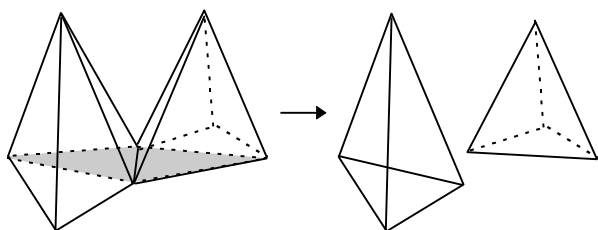


Figura 5 - Alteração topológica global resultante da aplicação da regra 1 de eliminação de degenerações.

Qualquer componente conexa deve conter alguma borda, para que seja possível aplicar o algoritmo de minimização. Por essa razão, a cada divisão do modelo, as novas componentes devem ser verificadas e removidas, se não possuírem bordas (internamente, as superfícies são representadas como sólidos cujas bordas são faces invisíveis).

## 5 Implementação e Perspectivas futuras

O sistema está implementado em linguagem C (conjuntamente com a biblioteca gráfica OpenGL) com interface gráfica em linguagem Tcl/Tk, em ambiente UNIX.

Nesta fase inicial, para manipulação das superfícies foi utilizada a estrutura de dados half-edge [Mäntylä (1988)] específica para modelos *manifold*. A malha inicial necessária para a minimização deve ser fornecida ao sistema via arquivo e pode ser triangulada de diversas formas pelo próprio programa, a critério do usuário. O processo de minimização é totalmente automático, incluindo alterações topológicas globais da superfície minimizada.

A manipulação de modelos *nonmanifold* (que implica na utilização de outra estrutura de dados) é o

próximo objetivo deste trabalho, para lidar com um número bem maior de superfícies mínimas.

Outro objetivo importante é o da geração automática de uma malha inicial a partir de uma fronteira dada, para solucionar o problema de Plateau na sua forma original.

## 6 Resultados

Foram realizados alguns testes com base em superfícies mínimas simples já conhecidas. As malhas iniciais (geradas por um pequeno programa auxiliar, nesta fase inicial do trabalho) foram obtidas via arquivo e trianguladas para aplicação do algoritmo de minimização.

A Figura 6 mostra algumas etapas da geração da catenóide estável, a superfície mínima com fronteira em dois círculos muito próximos. A superfície inicial utilizada foi um cilindro. Não ocorrem degenerações durante a minimização.

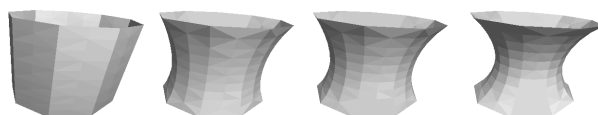


Figura 6 - Geração da catenóide estável: superfície mínima com fronteira em dois círculos próximos.

A Figura 7 destaca algumas fases do processo de minimização de uma superfície cilíndrica com suas bordas circulares suficientemente afastadas para gerar a catenóide instável. A remoção de degenerações e a alteração da topologia global da superfície, durante o processo, é importante para obter eficientemente a solução, do ponto de vista topológico e geométrico.

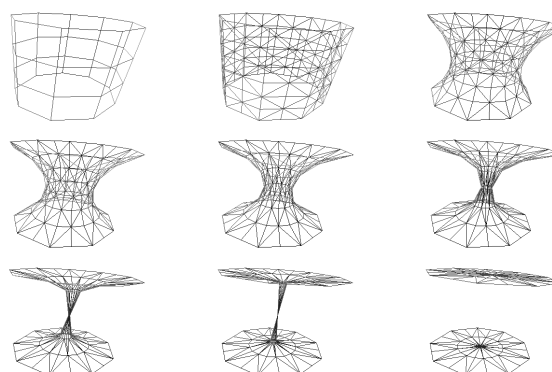


Figura 7 - Geração da catenóide instável: superfície mínima com fronteira em dois círculos afastados.

A Figura 8 mostra o processo de geração da catenóide instável, sem remoção de degenerações. A partir do estágio 6 da figura, o método do gradiente conjugado deixou de convergir e foi substituído pelo método de eliminação de Gauss. O processo revelou que pode, periodicamente, deixar de minimizar.

Finalmente, a Figura 9 mostra a minimização de um cilindro cortado pela sua geratriz. A eliminação de algumas degenerações que surgem nas últimas etapas não altera a topologia global da superfície.

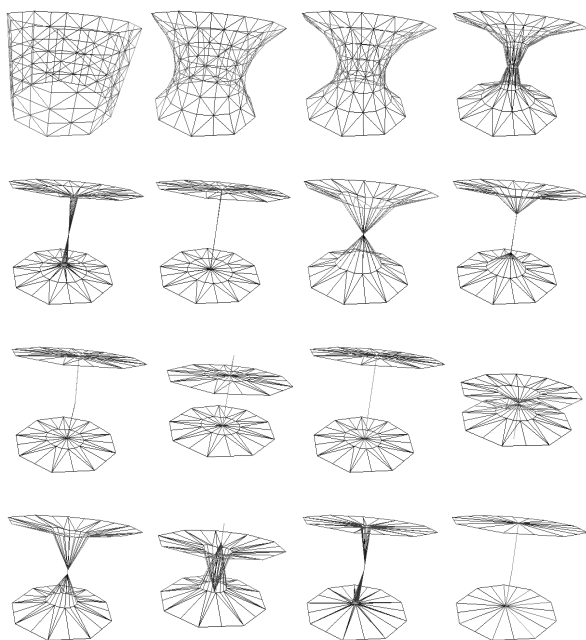


Figura 8 - Problemas na geração da catenóide instável sem alterações topológicas.

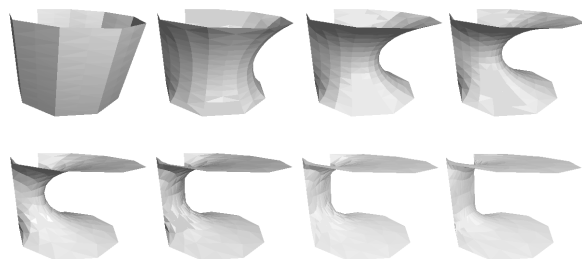


Figura 9 - Minimização de um cilindro “aberto”.

## 7 Conclusões

O objetivo deste trabalho é apresentar um sistema para a solução do problema de Plateau, capaz de gerar uma superfície discreta de área mínima, restrita a uma dada fronteira formada por curvas poligonais fechadas. O

sistema se baseia no algoritmo proposto recentemente por Pinkall e Polthier que minimiza gradativamente a área de uma superfície triangulada inicial dada, resolvendo, em cada iteração, um sistema linear de ordem  $n$ , onde  $n$  é o total de pontos interiores da triangulação.

A principal contribuição deste trabalho é a inclusão de procedimentos topológicos para remoção de possíveis degenerações que possam ocorrer na triangulação durante a minimização, a fim de permitir a utilização do eficiente método do gradiente conjugado (para minimização de funções) na resolução do sistema linear associado a cada iteração. Dessa forma, é possível também a alteração automática da topologia global da triangulação, tornando o processo de minimização completo e independente.

Novos objetivos incluem a manipulação de modelos *nonmanifold* (para lidar com um conjunto bem maior de superfícies mínimas) e a geração automática de uma malha inicial partindo de sua fronteira (para solucionar o problema de Plateau na sua forma original).

## 8 Agradecimentos

Os autores agradecem aos colegas do LCG, especialmente aos Professores António Oliveira e Rubem Mondaine pela preciosa contribuição ao trabalho. Agradecem também ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

## 9 Referências Bibliográficas

- [Almgren 1982] F. Almgren, “Minimal surface forms”, *The Mathematical Intelligencer* **4** (1982), 164-172.
- [Brakke 1992] K. A. Brakke, “The Surface Evolver”, *Experimental Math* **1** (1992) 141-165.
- [Concus 1967] P. Concus, “Numerical solution of the minimal surface equation”, *Math. Comput.* **21** (1967), 340-350.
- [Courant 1950] R. Courant, *Dirichlet’s Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*, Interscience, New York, 1950.
- [Douglas 1931] J. Douglas, “Solution of the problem of Plateau”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **33** (1931), 263-321.
- [Dziuk 1991] G. Dziuk, “An algorithm for evolutionary surfaces”, *Numer. Math.* **58** (1991) 603-611.
- [Mäntylä 1988] M. Mäntylä, *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press, Rockville, Maryland, 1988.

[Pinkall & Polthier 1993] U. Pinkall & K. Polthier, “Computing discrete minimal surfaces”, *Experimental Math.* **2** (1993), 15-36.

[Plateau 1873] J. A. F. Plateau *Statique Experimentale et Théorétique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moleculaires*, Gauthiers-Villars, Paris, 1873.

[Press et al. 1990] W. H. Press; B. P. Flannery; S. A. Teukolsky & W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York, 1992.

[Radó 1930] T. Radó, “The problem of least area and the problem of Plateau”, *Math. Zeit.* **32** (1930), 763-796.

[Wilson 1961] W. L. Wilson, “On discrete Dirichlet and Plateau problems”, *Num. Math.* **3** (1961), 359-373.